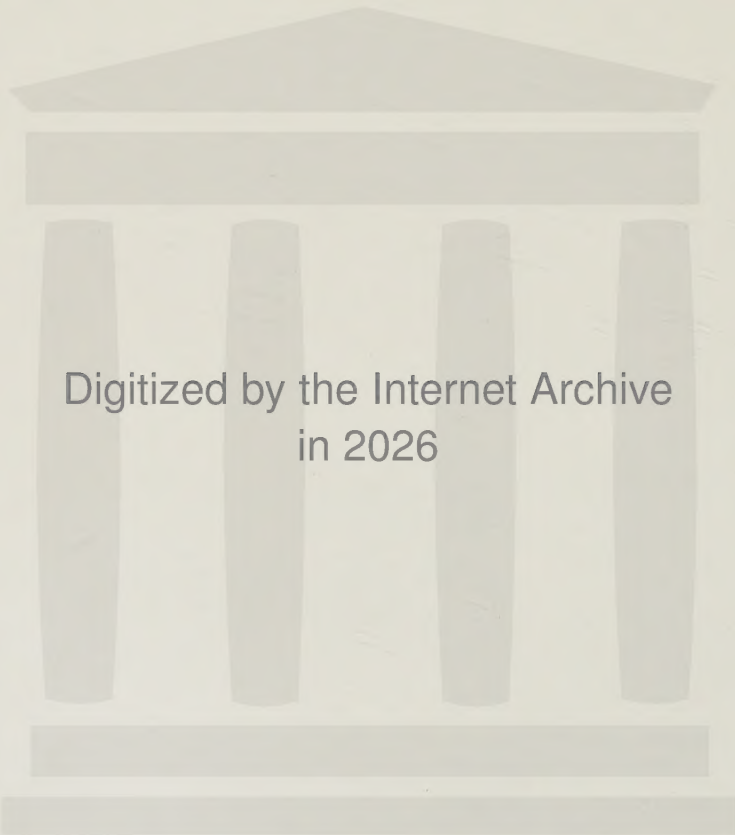


DEFORMATIONEN DER POINCARÉGRUPPE UND IHRER DARSTELLUNGEN

Harald Brennich

1974



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554604_0015

DEFORMATIONEN DER POINCARÉGRUPPE UND IHRER DARSTELLUNGEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von
Harald Brennich

München, November 1973



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H.-J. Meister

2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Süßmann

Tag der mündlichen Prüfung: 26.6.74

Zusammenfassung.

Drei Fragestellungen werden behandelt: 1. Wie kann man die Begriffe Deformation und Kontraktion für Lie-Gruppen und ihre Darstellungen definieren? 2. Welche Lie-Gruppen können Symmetriegruppen einer physikalischen Kinematik sein? 3. Wie kann man die Darstellungen der Poincarégruppe zu Darstellungen der Galileigruppe kontrahieren?

In Kapitel 1 erklären wir die Deformation und Kontraktion von Lie-Algebren derart, daß sie sich ohne Schwierigkeit auf Lie-Gruppen übertragen lassen. Um insbesondere Inönü-Wigner-Kontraktionen von Lie-Gruppen definieren zu können, führen wir den Begriff der einfachen Kontraktion von Lie-Algebren ein, der sich ohne weiteres auf Lie-Gruppen übertragen läßt.

In Kapitel 2 definieren wir die Deformation, Kontraktion und einfache Kontraktion von Lie-Gruppen und stellen einen Zusammenhang ähnlich dem eines Homomorphismus einer Lie-Gruppe und dem entsprechenden Homomorphismus ihrer Lie-Algebra her. Wir beweisen, daß das Ergebnis einer einfachen Kontraktion immer zu einem semi-direkten Produkt einer abgeschlossenen Untergruppe mit einem einfach-zusammenhängenden nilpotenten Normalteiler isomorph ist. Wir zeigen, wie sich die Existenz einer Inönü-Wigner-Kontraktion von Lie-Gruppen ausdrücken läßt in algebraischen und topologischen Eigenschaften dieser Gruppen.

In Kapitel 3 definieren wir die Deformation, Kontraktion und einfache Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen, zeigen, wie eine Deformation, bzw. Kontraktion, der Lie-Gruppe eine Deformation, bzw. Kontraktion der Lie-Transformationsgruppe erzeugt, und analysieren die Struktur des Ergebnisses einer einfachen Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen.

In Kapitel 4 definieren wir die Deformation, Kontraktion und einfache Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen. Wir zeigen, wie man aus Deformationen etc. von einzelnen Darstellungen solche von direkten Integralen und Tensor-Produkten von Darstellungen gewinnt. Dabei bemühen wir uns besonders um eine Unterscheidung von Deformationen und Kontraktionen von Darstellungen.

In Kapitel 5 wenden wir uns der Frage nach den möglichen kinematischen Symmetriegruppen zu. Dabei setzen wir voraus, daß diese Symmetriegruppen 10-dimensionale Lie-Gruppen sind, die die Drehgruppe als Untergruppe enthalten. Aus der Abhängigkeit des Viererimpul-

ses von der Geschwindigkeit ergibt sich bei Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung, daß (bis auf lokale Isomorphie) nur drei Lie-Gruppen in Frage kommen: die deSittergruppe $O(1,4)_0$, die Poincarégruppe $IO(1,3)_0$ und die Anti-deSittergruppe $\overline{O(2,3)}_0$; die deSittergruppe scheidet aus topologischen Gründen aus. Wir untersuchen kurz die Eigenschaften einer unter der Anti-deSittergruppe invarianten Kinematik, insbesondere das Kausalitätsproblem.

In Kapitel 6 kontrahieren, bzw. deformieren, wir die irreduziblen Darstellungen der Poincarégruppe mit diskretem Spin. Bei Kontraktion gehen Darstellungen der Poincarégruppe, die ein Teilchen der Masse $m > 0$ mit dem Spin j beschreiben, in ebensolche der Galileigruppe über; dem nicht-relativistischen Teilchen wird dabei die innere Energie 0 zugeordnet, und von 0 verschiedene innere Energien kann man nur durch Deformationen erreichen, die keine Kontraktion sind. Tachyonische Darstellungen der Poincarégruppe gehen in Darstellungen der Galileigruppe auf nicht-relativistischen Wellenfeldern über, deren Wellenzahl gleich dem minimalen räumlichen Impuls ist. Dabei hat die Darstellung der Galileigruppe den Spin 0, wenn auch die tachyonische Darstellung den Spin 0 hat; für Spin $|j| > 0$ ist die Darstellung der Galileigruppe reduzibel und ihr Spin nimmt - ohne Entartung - alle Werte von $|j|$ bis ∞ an. Darstellungen der Poincarégruppe, die Teilchen der Masse $m = 0$ mit dem Spin $|j|$ beschreiben, gehen ebenfalls in Darstellungen der Galileigruppe über, die Wellenfelder mit Spin $|j|$ beschreiben; die Wellenzahl kann dabei beliebig gewählt werden. In diesem Zusammenhang diskutieren wir kurz den Ursprung der nicht-relativistischen Theorien über einen Welt-Äther. Abschließend kehren wir die Deformation um: Aus einer Darstellung der Galileigruppe, die nicht-relativistische wechselwirkende Teilchen beschreibt, erhalten wir durch vollständige Ausreduktion und komponentenweise Deformation - bis auf Äquivalenz - eine Darstellung der Poincarégruppe, die das MUTZE'sche Modell einer relativistischen Theorie mit direkter Wechselwirkung beschreibt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Teil I: Deformation und Kontraktion von Lie-Gruppen und Darstellungen	11 - 60
Kapitel 1: Deformation und Kontraktion von Lie-Algebren	11
§1 Deformation von Lie-Algebren	11
§2 Kontraktion von Lie-Algebren	13
§3 Einfache Kontraktion von Lie-Algebren	16
§4 Beispiele für die Kontraktion von Lie-Algebren	20
Kapitel 2: Deformation und Kontraktion von Lie-Gruppen	23
§1 Deformation von Lie-Gruppen	23
§2 Kontraktion von Lie-Gruppen	26
§3 Einfache Kontraktion von Lie-Gruppen	29
§4 Beispiele für die Kontraktion von Lie-Gruppen	35
Kapitel 3: Deformation und Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen	38
§1 Deformation von Lie-Transformationsgruppen	38
§2 Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen	40
§3 Einfache Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen	41
§4 Beispiele für die Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen	45
Kapitel 4: Deformation und Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen	47
§1 Deformation von Lie-Gruppendarstellungen	47
§2 Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen	52
§3 Einfache Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen	56
§4 Beispiele für die Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen	57
Teil II: Deformationen der Poincarégruppe und ihrer Darstellungen	61 - 104
Kapitel 5: Deformationen der Poincarégruppe	61
§1 Welche Symmetriegruppen sind möglich?	61

§2 Ein Blick in die Anti-deSitter-Welt	67
Kapitel 6: Kontraktion der Darstellungen der Poincarégruppe zu Darstellungen der Galileigruppe	84
§1 Relativistische und nicht-relativistische Teilchen der Masse $m > 0$	84
§2 Relativistische Tachyonen und nicht-relativistische Wellen= felder	89
§3 Relativistische masselose Teilchen und nicht-relativistische Wellenfelder	95
§4 Deformation wechselwirkender nicht-relativistischer Teilchen zu wechselwirkenden relativistischen Teilchen	99
Schlußbemerkungen	105
Literatur	107
Bezeichnungen	110

Einleitung.

Seit der zu Beginn dieses Jahrhunderts erreichten Erkenntnis der Poincaréinvarianz der dem physikalischen Geschehen zugrundeliegenden Gesetze ist auch der Übergang von Lorentztransformationen zu Galileitransformationen als Übergang zu unendlicher Lichtgeschwindigkeit,

$$t = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{t + \underline{x} \cdot \underline{v} / c^2}{\sqrt{1 - \underline{v}^2 / c^2}}$$

$$\underline{x} + t \underline{v} = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\underline{x} + \frac{1}{\sqrt{1 - \underline{v}^2 / c^2}} \left(t + \frac{\underline{v} \cdot \underline{x}}{c^2 (1 + \sqrt{1 - \underline{v}^2 / c^2})} \right) \underline{v} \right)$$

qualitativ bekannt. Bei der Anwendung auf physikalische Probleme ist dieser Übergang in einigen Fällen benutzt worden, um die nicht-relativistische Beschreibung als Grenzfall zu erhalten; oft stellt sich der Übergang freilich als geschicktes Jonglieren mit Faktoren $1/c$ dar. Nur eine allgemeine Theorie kann diese scheinbare Willkür beseitigen. Diese Theorie erhält man durch die Beschreibung solcher Übergänge als Deformation von Symmetrien. Durch die Untersuchung der Deformationen erhält man gleichzeitig ein Instrument zur mathematischen Untersuchung der möglichen Abweichungen der tatsächlichen physikalischen Symmetrien von der ihnen zugeschriebenen Form.

Die erste systematische Untersuchung über den Übergang zu unendlicher Lichtgeschwindigkeit stellt die Arbeit von INÖNÜ und WIGNER [5] dar. Darin wird der Übergang von der Lie-Algebra der Poincarégruppe zu der der Galileigruppe dadurch erreicht, daß man die Poincarégruppenalgebra mit einer Schar von Automorphismen der Lie-Algebra der Galileigruppe transformiert, die durch die Lichtgeschwindigkeit parametrisiert ist; man erhält so eine Schar von zur Poincarégruppenalgebra isomorphen Lie-Algebren, die für $c \rightarrow \infty$ gegen die Lie-Algebra der Galileigruppe konvergiert. In den folgenden Jahren wurden allgemeinere Verfahren entwickelt: Das der Kontraktion, wobei man eine beliebige Schar von isomorphen Lie-Algebren durchläuft, die gegen eine Lie-Algebra konvergiert, und das der Deformation, wo man eine analytische Schar nicht notwendig isomorpher Lie-Algebren durchläuft.

Für Lie-Algebren hat man die Frage nach den möglichen Deformationen der Algebra oder einer Darstellung davon auf die Möglichkeit infinitesimaler Deformationen - ein rein algebraisches Problem -

zurückgeführt; zu erwähnen sind hier die Gell-Mann-Zerlegung einer Darstellung und verwandte Fragestellungen [39]. Mit solch algebraischen Methoden ist eine große Klasse von Lie-Algebren sowie ihrer Darstellungen detailliert analysiert worden [40].

Diese Entwicklung beschränkte sich aber im wesentlichen auf Lie-Algebren. Lie-Gruppen wurden nur in besonderen Fällen deformiert, z.B. einige Transformationsgruppen. Erst MICKELSSON und NIEDERLE [12] haben ein Verfahren zur Kontraktion lokaler Lie-Gruppen entwickelt, das von solchen besondern Eigenschaften absieht. Die in der Literatur durch ausschließliche Behandlung von Lie-Algebren häufig versteckt zum Ausdruck gebrachte Vorstellung, mit der Lösung der Fragestellungen für Lie-Algebren seien sie in allen relevanten Fällen auch für Lie-Gruppen gelöst, ist nun aber durch die Untersuchungen über den Zusammenhang von Lie-Gruppen-Darstellungen mit denen ihrer Algebren nicht aufrecht zu erhalten [44]. Es erweist sich durchaus als notwendig, eine Deformations- und Kontraktionstheorie für Lie-Gruppen zu entwickeln.

Die Kontraktion einer Lie-Algebra ist eine spezielle Art von Deformation. Es empfiehlt sich deshalb, auch bei Lie-Gruppen die Kontraktion als Spezialfall einer Deformation einzuführen; unser Ausgangspunkt ist darum die Deformation von Lie-Gruppen. Das empfiehlt sich auch aus folgendem Grund: Geht man von einer unvollständigen Kenntnis der vorhandenen Symmetrien aus - und jede Kenntnis nicht-kompakter Symmetriegruppen wird zu einem gewissen Grad unvollständig sein, da hier die Menge der durch Messung nachgewiesenen Symmetrien im Verhältnis zum Rest der Symmetriegruppe immer klein erscheinen muß - so stellt sich die Frage, welche Symmetriegruppen mit dieser Kenntnis noch verträglich sind. Bei relativ umfassender Kenntnis der Symmetrien kann man davon ausgehen, daß die tatsächlich vorliegende Symmetriegruppe von der angenommenen nicht sehr verschieden ist. Dieses "nicht sehr verschieden" interpretieren wir als das Vorliegen einer analytischen Schar von Gruppenstrukturen, welche die tatsächliche Symmetriegruppe mit der angenommenen verbindet. Eine solche Schar nennen wir Deformation einer Lie-Gruppe. Dabei verdient der Fall, wo alle Gruppenstrukturen bis auf eine isomorph sind - solch eine Deformation nennen wir Kontraktion - als einfachste Möglichkeit natürlich besonderes Interesse. Da wir auch Kontraktionen global definieren, stellen wir an sie stärkere Forderungen als MICKELSSON und NIEDERLE.

Ganz ähnlich wie bei den Homomorphismen einer Lie-Gruppe gibt es

auch für die Deformationen einer Lie-Gruppe zugeordnete Deformationen ihrer Lie-Algebra. Dadurch lassen sich aus den Ergebnissen über die Deformationen der Lie-Algebra einer Lie-Gruppe Rückschlüsse auf die Deformationen der Gruppe selbst ziehen. Die Möglichkeit, die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe in einer bestimmten Weise deformieren zu können, ist aber nur eine notwendige Bedingung für die Existenz einer entsprechenden Deformation der Lie-Gruppe, da nicht jeder Deformation der Lie-Algebra eine der Lie-Gruppe entspricht: den bei einer Deformation durchlaufenen Lie-Algebren brauchen i.a. keine auf einer festen Mannigfaltigkeit definierten Lie-Gruppen zu entsprechen - dies ist aber bei unserem Begriff von Deformation einer Lie-Gruppe gerade vorausgesetzt. Nichts destoweniger ist hiermit die umfangreiche Theorie der Deformation von Lie-Algebren in weitem Umfang für die Deformation von Lie-Gruppen nutzbar gemacht.

Die der Kontraktion einer Lie-Gruppe zugeordnete Deformation ihrer Lie-Algebra ist wieder eine Kontraktion. Dabei gelingt es uns, für Lie-Gruppen ein Analogon zu dem besonders einfachen Verfahren von INÖNÜ und WIGNER anzugeben, wobei wir ausnutzen, daß diese Kontraktionen Darstellungen der multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen sind. Aus der Existenz einer solchen Kontraktion ergeben sich für eine Lie-Gruppe starke topologische und algebraische Konsequenzen: die der Lie-Gruppe zugrundeliegende Mannigfaltigkeit ist dann das direkte Produkt eines Vektorraums mit einer der abgeschlossenen Untergruppen und das Ergebnis der Kontraktion ist ein semi-direktes Produkt eines auf diesem Vektorraum definierten nilpotenten Normalteilers mit dieser Untergruppe. Weiter können wir für INÖNÜ-WIGNER Kontraktionen im engeren Sinne hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz einer entsprechenden Kontraktion der Lie-Gruppen der bei dieser Kontraktion auftretenden Lie-Algebren angeben.

Wir sind von Lie-Gruppen als Symmetriegruppen der Physik ausgegangen. Für die Untersuchung sind also nicht nur abstrakte Gruppen wichtig, sondern auch ihre Realisierungen. In der klassischen Physik sind dies überwiegend Realisierungen als Transformationsgruppe der Raumzeit, in der Quantenmechanik Realisierungen als Darstellungen auf Hilberträumen, und in der Quantenfeldtheorie Realisierungen sowohl als Transformationsgruppen (wegen ihrer Wirkung auf die Argumente der Testfunktionen) als auch als Hilbertraumdarstellungen (wegen des Transformationsverhaltens der Quantenfelder). Darum ist es wünschenswert, den Begriff der Deformation auch für Transformations-

gruppen und Hilbertraumdarstellungen zu definieren. Für Transformationsgruppen liegt es dabei auf der Hand, entsprechend der bei der Deformation der Lie-Gruppe benutzten Schar von Gruppenstrukturen eine analytische Schar von Wirkungen dieser Gruppen auf einer Mannigfaltigkeit als Deformation der Wirkung der Transformationsgruppe einzuführen. Liegt dabei insbesondere eine Kontraktion der Lie-Gruppen vor, so kann man die hier auftretende Schar von Wirkungen isomorpher Lie-Gruppen ausdrücken durch eine Schar von Wirkungen nur einer Lie-Gruppe. Letztere Schar kann - im Rahmen der Analytizität - noch weitgehend beliebig sein; sind die dabei auftretenden Wirkungen aber alle äquivalent, so sprechen wir von einer Kontraktion der Wirkung und der Transformationsgruppe.

Bereits INÖNÜ und WIGNER [5] haben die Kontraktion von Darstellungen von Lie-Algebren angegeben, und in der Folge hat es eine Fülle von Arbeiten zu diesem Thema gegeben. Die Untersuchungen blieben aber immer unvollständig, da man sich meistens auf die Deformation einzelner irreduzibler Darstellungen beschränkte, ohne Aussagen über die Deformation der anderen Darstellungen, insbesondere der reduziblen, zu machen. Wir definieren zu einer gegebenen Deformation einer Lie-Gruppe die Deformation einer Darstellung dieser Gruppe als eine Schar von Darstellungen der entsprechenden Gruppen derart, daß diese Schar - angewendet auf einen Vektor - für eine dichte Teilmenge des Darstellungsraums analytisch ist. Es zeigt sich, daß für die so definierten Scharen von Abbildungen die Bildung von direkten Integralen und Tensor-Produkten ebenso möglich ist wie für einzelne Darstellungen, so daß man bei der Untersuchung der Deformationen der Darstellungen einer Lie-Gruppe sich i.a. auf die irreduziblen Darstellungen beschränken kann.

Unsere Deformationsbegriffe für Lie-Gruppen, Transformationsgruppen und Darstellungen sind ganz allgemein anwendbar. In diesem Rahmen sind für die Poincarégruppe zwei Problemkreise der Behandlung zugänglich: 1. Welche Symmetriegruppen außer der Poincarégruppe sind mit der physikalischen Erfahrung verträglich? und 2. Wie sieht der Übergang von der relativistischen zur nicht-relativistischen Physik aus?

Sehen wir als durch die physikalische Erfahrung belegt an, daß es eine 10-dimensionale Symmetriegruppe gibt, die erzeugt wird von den Drehungen, den räumlichen und zeitlichen Verschiebungen und den Geschwindigkeitstransformationen, wobei die Drehungen die Zeit inva-

riant lassen und auf den Raum und die Geschwindigkeit in der üblichen Art und Weise wirken, so bleiben bei Berücksichtigung der allgemeinen Struktur der Lie-Algebra einer Lie-Gruppe bis auf lokale Isomorphie nur noch drei Lie-Gruppen als Symmetriegruppen der Raumzeit übrig: die Poincarégruppe und die beiden deSittergruppen. Fordern wir weiter, daß die Symmetriegruppe durch eine Deformation aus der Poincarégruppe hervorgehen soll, so verbleibt außer der Poincarégruppe nur eine unendlich-fache Überlagerungsgruppe der $O(3,2)_0$, die Anti-deSittergruppe, denn auf der Mannigfaltigkeit der Poincarégruppe sind zur $O(4,1)_0$ lokal-isomorphe Lie-Gruppen nicht definiert.

Der homogene Raum der $O(3,2)_0$ bezüglich der Lorentzgruppe hat eine zyklische Zeit. Diese Zyklizität spielt für freie Teilchen keine besondere Rolle, da die zeitartigen Geodäten geschlossene Kurven sind, was für die freien Teilchen zur Folge hat, daß sie zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten Punkt durchlaufen. Bei wechselwirkenden Teilchen dagegen sind die Bahnen i.a. offene Kurven, d.h. zu einer Zeit durchläuft das Teilchen mehrere Punkte. Damit würde aber der Teilchenbegriff sinnlos, so daß die $O(3,2)_0$ als Symmetriegruppe der Raumzeit nicht in Frage kommt. Im Anti-deSitterraum, dem homogenen Raum der Anti-deSittergruppe bezüglich der Lorentzgruppe, macht sich diese Zyklizität nur noch als Periodizität der zeitartigen Geodäten, d.h. der Bahnen freier Teilchen, bemerkbar; nicht-periodische Bahnen führen hier nicht zu einem Widerspruch mit dem Teilchenbegriff. Allerdings sind im Anti-deSitterraum die Bahnen masseloser Teilchen singulär, so daß man über die Bewegung masseloser Teilchen - um die Kausalität zu wahren - zusätzliche Annahmen machen muß, wie etwa, daß sich diese Bewegung als Grenzfall der Bewegung von Teilchen mit von 0 verschiedener Masse ergibt. Die Problematik, die sich für die Teilchen-Mechanik aus der Existenz masseloser Teilchen ergibt, taucht in der Feldtheorie wieder auf: die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist im Anti-deSitterraum durch die Angabe ihrer Werte und der Zeitableitung auf einer Hyperebene $t = t_0$ nicht festgelegt. Ob für die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung trotzdem ein brauchbarer Kausalitätsbegriff vorliegt, bedarf noch einer tieferen Untersuchung. Die Mikro-Kausalität von Quantenfeldern kann man im Anti-deSitterraum völlig analog zum Minkowskiraum definieren als Kommutativität von Feldoperatoren, deren Testfunktionen zu einander raumartige Träger haben - raumartig natürlich im Sinne der Metrik des Anti-deSitterraums.

Ein Vorzug der Anti-deSittergruppe gegenüber der Poincarégruppe ist, daß sie nicht-triviale Erweiterungen durch einfache Lie-Gruppen - allerdings nicht die $SU(3)$ - zuläßt [45]. Dieser Vorzug wird aber wettgemacht durch die Schwierigkeiten der mathematischen Behandlung der Anti-deSittergruppe. So versagt wegen der zeitlichen Periodizität der Bewegung freier Teilchen die übliche Streutheorie: zwei Teilchen verlassen nie endgültig den gegenseitigen Einflußbereich, selbst wenn dieser endlich ist, da sie durch die Periodizität immer wieder aneinander herangeführt werden. Quantenmechanisch drückt sich dies darin aus, daß der Hamilton-Operator freier Teilchen ein rein diskretes Spektrum hat und somit eine S-Matrix nicht existiert oder trivial ist. Deshalb wird man, solange keine Hinweise für ein Versagen der Poincaréinvarianz vorliegen, bei der Beschreibung der physikalischen Vorgänge im Rahmen von Theorien mit Poincaréinvarianz bleiben, obwohl eine quantitative Widerlegung der deSitterinvarianz unmöglich ist.

Anders bei der Galileigruppe. Obwohl hier quantitativ bewiesen ist, daß sie als Symmetriegruppe nicht in Frage kommt, wird sie in der Physik häufig benutzt. Denn eine Beschreibung im Rahmen der Galileigruppe ist mathematisch und physikalisch viel einfacher als die relativistische, und man nimmt an, daß die quantitativen Abweichungen von der -relativistischen- Wirklichkeit für niedrige Geschwindigkeiten nicht erheblich sind. Eine quantitative Beschreibung dieser Abweichung gewinnt man durch Deformation von Darstellungen der Poincarégruppe zu Darstellungen der Galileigruppe.

Die Kontraktion der irreduziblen Darstellungen der Poincarégruppe zu solchen der Galileigruppe ist für $p^2 \neq 0$ und Spin 0 in der Algebra bereits von INÖNÜ und WIGNER [5] durchgeführt worden. Bei der Kontraktion von Darstellungen der Poincarégruppe, die relativistische freie Teilchen der Masse $m > 0$ beschreiben, auf Darstellungen der Galileigruppe empfiehlt es sich, zu Darstellungen von zentralen Erweiterungen dieser Gruppen durch die additive Gruppe der reellen Zahlen überzugehen, sonst treten Darstellungen bis auf einen Faktor auf. Die irreduziblen Darstellungen werden dann für beide Gruppen durch die freie Masse m , die innere Energie e und den Spin j klassifiziert, und die Kontraktion läßt diese Klassifizierung unverändert. Das freie Teilchen ist dabei im Fall der zentralen Erweiterung der Poincarégruppe durch die Masse $m + e/c^2$ und den Spin j charakterisiert, im Fall der zentralen Erweiterung der Galileigruppe durch die freie Masse m und den Spin j . Der Unterschied zwischen den Dar-

stellungen der beiden Gruppen ist von der Ordnung $\frac{1}{c^2}$, und eine Kontraktion liegt genau dann vor, wenn $e = 0$ ist. Die Einstein'sche Massen-Energie-Formel $E = mc^2$ ist in unserem Rahmen Ausdruck der Tatsache, daß man bei der Deformation in bestimmter Weise vorgehen muß, um nicht-triviale Darstellungen der Galileigruppe zu gewinnen.

Die Darstellungen der Poincarégruppe, die masselose Teilchen beschreiben, gehen bei Kontraktion in Darstellungen der Galileigruppe über, die nicht-relativistische Wellenfelder beschreiben. Diese Wellenfelder sind charakterisiert durch Wellenzahl, Spin und Helizität; Spin und Helizität haben dabei ganz ähnliche Eigenschaften wie bei masselosen relativistischen Teilchen und werden durch die Kontraktion nicht geändert. Die Wellenzahl - eine nicht-relativistische Invariante - hängt dagegen davon ab, wie die Kontraktion geführt wird und kann jeden Wert zwischen 0 und ∞ annehmen. Der Unterschied zwischen relativistischer und nicht-relativistischer Darstellung ist - unabhängig von der speziellen Kontraktion - nur von der Ordnung $\frac{1}{c}$, so daß es nicht verwundert, daß es die nicht-relativistische Beschreibung des Photons war, die zu den ersten Widersprüchen mit dem Experiment und schließlich zur Ersetzung der Galileigruppe durch die Poincarégruppe führte. Die Quelle der Schwierigkeiten ist die Wellenzahl, die eine nicht-relativistische Invariante ist (nicht-relativistischer Dopplereffekt), in Wirklichkeit aber von der Geschwindigkeit des Beobachters abhängt (relativistischer Dopplereffekt).

Die tachyonischen Darstellungen der Poincarégruppe mit diskretem Spin schließlich kann man ebenfalls zu Darstellungen der Galileigruppe kontrahieren, die nicht-relativistische Wellenfelder beschreiben. Die Wellenzahl wird dabei durch $\sqrt{-p^2}$ gegeben, und die Helizität von Tachyon und Wellenfeld sind gleich. Spin 0 geht in Spin 0 über, aber für einen Spin $j > 0$ des Tachyons erhalten wir im nicht-relativistischen Grenzfall eine direkte Summe von Wellenfeldern mit den Spins $j+k$, $k \in \mathbb{N}$. Relativistische und nicht-relativistische Darstellung unterscheiden sich wieder nur um Terme der Größenordnung $\frac{1}{c}$. Diskrepanzen zwischen nicht-relativistischer Beschreibung und Beobachtung würden sich im Fall $j > 0$ dadurch ergeben, daß nach der nicht-relativistischen Theorie die einzelnen Komponenten der direkten Summe über den Spin invariant sind, während sie durch eine Lorentztransformation vermischt werden. Solche Überlegungen haben jedoch wenig Bedeutung, solange man Tachyonen nicht beobachtet hat. Immerhin regt die Tatsache, daß der nicht-relativisti-

stische Limes von Tachyonen ein Weilenfeld ist, zu der Bemerkung an, daß man für Tachyonen nicht unbedingt nur nach einer Teilchen-Interpretation suchen sollte, wie das FEINBERG [43] und andere tun.

Eine beliebige Darstellung der Poincarégruppe kann man zu einer Darstellung der Galileigruppe deformieren, indem man sie zunächst ausreduziert und dann die einzelnen irreduziblen Komponenten deformiert. Handelt es sich bei der Darstellung der Poincarégruppe speziell um das Tensor-Produkt von Darstellungen, die freie Teilchen der Masse $m > 0$ beschreiben, so erhält man dadurch eine zum Tensor-Produkt der entsprechenden Darstellungen der Galileigruppe äquivalente Darstellung der Galileigruppe, da die Ausreduktion des Tensor-Produkts in beiden Fällen gleich ist (die Clebsch-Gordan-Operatoren sind allerdings verschieden). Damit erfüllt die so definierte Deformation der Darstellungen der Poincarégruppe die Grundvoraussetzung, um als Übergang von einer relativistischen zu einer nicht-relativistischen Beschreibung interpretiert werden zu können, nämlich, daß dabei Systeme freier relativistischer Teilchen in Systeme entsprechender freier nicht-relativistischer Teilchen übergehen.

Für die Anwendung der Deformationstheorie ist die umgekehrte Fragestellung jedoch noch interessanter: Sei eine nicht-relativistische Beschreibung eines physikalischen Vorgangs gegeben; gibt es dann ein Verfahren, diese Beschreibung mittels Deformation in eine relativistische zu "übersetzen"? Für ein System zweier nicht-relativistischer Teilchen, die über ein Potential wechselwirken, ist das möglich. Reduziert man die entsprechende Darstellung der Galileigruppe aus und deformiert sie komponentenweise, so erhält man eine Darstellung der Poincarégruppe, die äquivalent ist zu dem von MUTZE [26] entwickelten Modell zweier relativistischer Teilchen mit direkter Wechselwirkung. Der S-Operator ist in beiden Beschreibungen äquivalent, aber i.a. verschieden. Hierin zeigt sich, daß diese "Übersetzung" einer nicht-relativistischen in eine relativistische Beschreibung relativ formal ist und keine relativistischen "Effekte" hervorbringt. Jedoch ist die Existenz einer solchen formalen Übertragung für die Festkörperphysik und die nieder-energetische Kernphysik - soweit es dabei eben nicht um spezifisch relativistische Effekte geht - eine ausreichende Rechtfertigung für die nicht-relativistische Behandlung dieser Systeme.

Teil I: Deformation und Kontraktion von Lie-Gruppen und Darstellungen

Wir behandeln zunächst die Deformation und Kontraktion von Lie-Algebren. Denn fast alle Begriffe für Lie-Gruppen sind Übertragungen entsprechender Begriffe für Lie-Algebren. Zudem sollen für das folgende benötigte Sprechweisen festgelegt werden. Dann untersuchen wir die Deformation und Kontraktion von Lie-Gruppen. Dabei gehen wir axiomatisch vor und stellen einen der Zuordnung zwischen Lie-Gruppen- und Lie-Algebra-Homomorphismen analogen Zusammenhang zwischen den Deformationen und Kontraktionen von Lie-Gruppen und denen von Lie-Algebren her. Abschließend werden die Begriffe Deformation und Kontraktion für Lie-Transformationsgruppen und für Darstellungen von Lie-Gruppen eingeführt.

Kapitel 1: Deformation und Kontraktion von Lie-Algebren

§1 Deformation von Lie-Algebren

Über die Deformation von Lie-Algebren gibt es bereits eine umfangreiche Literatur, die insbesondere den Zusammenhang von Deformationen mit der Kohomologie der Lie-Algebren [1], [3] und die geometrische Interpretation einer Deformation [2] untersucht. Wir wollen hier hauptsächlich unsere Sprechweise festlegen.

Unter einer Lie-Struktur auf einem Vektorraum V verstehen wir eine anti-symmetrische bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$, die der Jacobi-Identität

$$1.1 \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \text{für alle } x, y, z \text{ aus } V$$

genügt; eine Lie-Algebra ist dann ein Paar $(V, [\cdot, \cdot])$. Eine Deformation ist eine ganze Schar solcher Lie-Strukturen auf einem Vektorraum.

1.2 Definition: Sei $L = (V, [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra und I ein offenes Intervall um 0; dann ist eine Deformation d von L eine analytische Abbildung $d: I \times V \times V \rightarrow V$ mit

i) $d(s, \cdot, \cdot)$ ist für alle s aus I eine Lie-Struktur;

ii) $d(0, \cdot, \cdot) = [\cdot, \cdot]$.

Die Forderung der Analytizität von d mag sehr streng scheinen, ist es aber nicht: In den Vektorraum-Variablen ist d linear und damit

ohnehin analytisch, für den Deformationsparameter s ist jede schwächere Forderung zu schwach, wie man am folgenden Beispiel sieht.

1.3 Beispiel: Seien $[,]$ und $[,]'$ zwei Lie-Strukturen auf dem Vektorraum V und $d: \mathbb{R} \times V \times V \rightarrow V$ mit

$$i) \quad d(s, x, y) := e^{-\frac{1}{4}s^2} [x, y] \quad \text{für } s > 0,$$

$$ii) \quad d(0, x, y) := 0,$$

$$iii) \quad d(s, x, y) := e^{-\frac{1}{4}s^2} [x, y]' \quad \text{für } s < 0.$$

Dann ist d beliebig oft differenzierbar und verbindet zwei beliebig auf einem Vektorraum vorgegebene Lie-Strukturen; somit ließe sich, wenn zwei Lie-Algebren durch eine Deformation ineinander übergeführt werden, kein Rückschluß auf die Struktur dieser Algebren ziehen, eine Deformation wäre ein für die Struktur einer Lie-Algebra unspezifischer Vorgang.

Ist eine Deformation einer Lie-Algebra gegeben, so können wir durch zwei Mechanismen eine neue Deformation erhalten, die sich nicht wesentlich von der vorgegebenen unterscheidet: Umparametrisierung der Deformation und Ersetzung der vorgegebenen Lie-Algebren durch isomorphe.

1.4 Definition: Zwei Deformationen $d: I \times V \times V \rightarrow V$ und $d': I' \times V' \times V' \rightarrow V'$ sind äquivalent, wenn es einen analytischen Diffeomorphismus $t: I' \rightarrow I$ und eine analytische Abbildung $J: I' \times V' \rightarrow V$ gibt mit

$$i) \quad t(0) = 0;$$

$$ii) \quad J_{s'} := J(s', \cdot) \text{ ist für alle } s' \text{ aus } I' \text{ linear und bijektiv;}$$

$$iii) \quad d'(s', x', y') = J_{s'}^{-1}(d(t(s'), J_{s'}(x'), J_{s'}(y'))).$$

Wir nennen t eine Umparametrisierung, J eine Isomorphismenschar, die Zuordnung $d \rightarrow d'$ eine Äquivalenztransformation und das Paar (t, J) die Erzeugende dieser Äquivalenztransformation.

Die Analytizitätsforderungen in der Definition 1.4 sind starke Einschränkungen, die wir jedoch in Kauf nehmen, weil die so definierten Äquivalenztransformationen wesentlich leichter zu behandeln sind als solche ohne Analytizität. Man rechnet leicht nach, daß die in 1.4

definierte Relation zwischen d und d' reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation ist.

Sind $d: I \times V \times V \longrightarrow V$ und $d': I' \times V \times V \longrightarrow V$ Deformationen mit $I \subseteq I'$ und $d'(s, \dots) = d(s, \dots)$ für s aus I , so nennen wir d die Beschränkung von d' auf I und schreiben $d = d' \downarrow I$; umgekehrt nennen wir d' eine Fortführung von d auf I' und schreiben $d' = d \uparrow I'$. Zwei Deformationen d und d' sind lokal-äquivalent, wenn es äquivalente Beschränkungen von d und d' gibt. Eine feste Deformation einer Lie-Algebra $(V, [,])$ definieren wir durch

1.5 $f: I \times V \times V \longrightarrow V$, $f(s, \dots) := [,]$ für alle s aus I .

Jede Beschränkung der festen Deformation und jede Fortführung ist wieder fest. Wir nennen eine Deformation trivial, wenn sie äquivalent zu einer festen Deformation ist, und lokal-trivial, wenn sie lokal-äquivalent zu einer festen Deformation ist (oder, was dasselbe bedeutet, wenn die Deformation eine triviale Beschränkung hat).

Wir sagen: Die Lie-Algebra $(V', [,'])$ läßt sich durch eine beliebig kleine Deformation aus der Lie-Algebra $(V, [,])$ erzeugen, wenn eine Deformation $d: I \times V \times V \longrightarrow V$ existiert derart, daß es zu jedem $t \neq 0$ aus I ein r aus I gibt mit $|r| \leq |t|$ und $(V', [,'])$ isomorph zu $(V, d(r, \dots))$. Eine Lie-Algebra heißt starr, wenn jede ihrer Deformationen lokal-trivial ist; durch eine beliebig kleine Deformation einer starren Lie-Algebra kann man also nur eine isomorphe Lie-Algebra erhalten.

1.6 Satz: Jede halbeinfache Lie-Algebra ist starr.

Beweis: [1;p.65].

Man muß aber beachten, daß starre Lie-Algebren sehr wohl zu nicht-isomorphen Lie-Algebren deformiert werden können, und insbesondere halbeinfache Lie-Algebren zu nicht-halbeinfachen. Siehe dazu Beispiel 4.1 .

§2 Kontraktion von Lie-Algebren

Bei der Definition von Deformation ist in der Literatur weitgehende Übereinstimmung festzustellen. Dagegen findet man für den Begriff Kontraktion von Lie-Algebren in der Literatur prinzipiell verschiedene Definitionen [2], [4;p.255], [5], [6], [7]. Wir scheuen uns nicht, dem eine weitere Definition hinzuzufügen indem wir Kontrak-

tionen als eine spezielle Deformation ansehen. Dazu führen wir den Begriff des Kontraktors ein.

2.1 Definition: Ein Kontraktor k von der Lie-Algebra $(V, [,])$ auf die Lie-Algebra $(V', [,'])$ ist eine analytische Abbildung $k: I \times V \rightarrow V'$ mit

i) $k_s := k(s, \cdot)$ ist für alle s aus I linear und für $s \neq 0$ bijektiv;

ii) $d^k: I \times V \times V \rightarrow V$, $d^k(s, x, y) := k_s^{-1}([k_s(x), k_s(y)]')$ für $s \neq 0$ und $d^k(0, \cdot, \cdot) := [,]$, ist eine Deformation von $(V, [,])$.

d^k heißt Kontraktion von $(V', [,'])$.

Die Analytizität von d^k ist für $s \neq 0$ bereits durch die von k gewährleistet. Es ist leicht zu zeigen, daß d^k genau dann analytisch ist, wenn es an der Stelle $s = 0$ stetig ist; denn d^k kann für $s = 0$ höchstens einen Pol haben, aber keine wesentliche Singularität. Die in der Literatur gebräuchlichen Definitionen einer Kontraktion unterscheiden sich von der unseren dadurch, daß sie teils auf die Analytizität von k verzichten, teils an k noch stärkere Bedingungen stellen als wir. Darauf werden wir am Schluß dieses Paragraphen nochmal eingehen.

2.2 Lemma: Gibt es einen Kontraktor von $(V, [,])$ auf $(V', [,'])$, so läßt sich $(V', [,'])$ durch eine beliebig kleine Deformation aus $(V, [,])$ erzeugen.

Beweis: Nach 2.1 ist d^k eine Deformation von $(V, [,])$ und $(V', [,'])$ ist isomorph zu $(V, d^k(s, \cdot, \cdot))$ für $s \neq 0$. ■

Aus einem Kontraktor können wir durch drei Mechanismen einen neuen konstruieren: Upparametrisierung und Multiplikation mit je einer Schar von regulären Transformationen von rechts und von links; dabei werden an diese Transformationen noch besondere Forderungen gestellt, damit man wieder einen Kontraktor erhält.

2.3 Definition: Zwei Kontraktoren $k^{(i)}: I_1 \times V_1 \rightarrow V'_1$, $i = 1, 2$, sind äquivalent, wenn es einen analytischen Diffeomorphismus $t: I_2 \rightarrow I_1$ und analytische Abbildungen $T: I_2 \times V'_1 \rightarrow V'_2$, $J: I_2 \times V_2 \rightarrow V_1$ gibt mit

- i) $t(0) = 0$;
- ii) $T_s := T(s, \cdot)$ ist für alle s aus I_2 ein Isomorphismus von $(V'_1, [\cdot, \cdot]'_1)$ auf $(V'_2, [\cdot, \cdot]'_2)$, $J_s := J(s, 0)$ ist für alle s aus I_2 linear und bijektiv sowie J_0 ein Isomorphismus von $(V_2, [\cdot, \cdot]_2)$ auf $(V_1, [\cdot, \cdot]_1)$;
- iii) $k_s^{(2)} = T_s k_t^{(1)} J_s$ für alle s aus I_2 .

Das Paar (t, J) erzeugt eine Äquivalenztransformation von $d^{k^{(1)}}$ auf $d^{k^{(2)}}$.

Ähnlich wie für Deformationen definieren wir für jede Lie-Algebra einen festen Kontraktor $fk: I \times V \longrightarrow V$ mit $fk_s := id_V$ für alle s aus I ; dann ist d^{fk} eine feste Deformation von $(V, [\cdot, \cdot])$. Ebenso wie für Deformationen kann man auch für Kontraktoren Beschränkung und Fortführung definieren; dann gilt in sofort einsichtiger Schreibweise: $d^{k \downarrow I} = d^k \downarrow I$ und $d^{k \uparrow I} = d^k \uparrow I$. Zwei Kontraktoren sind lokal-äquivalent, wenn sie äquivalente Beschränkungen besitzen. Ein Kontraktor heißt trivial, wenn er äquivalent zu einem festen Kontraktor ist und lokal-trivial, wenn er lokal-äquivalent zu einem festen Kontraktor ist.

2.4 Lemma: Ein Kontraktor ist genau dann trivial, wenn er lokal-trivial ist.

Beweis: Aus der Trivialität folgt sofort lokale Trivialität. Sei $k: I \times V \longrightarrow V'$ nun lokal-trivial; dann gibt es ein Teilintervall $I' \subseteq I$, ein Intervall I'' , eine Lie-Algebra $(V'', [\cdot, \cdot]'')$, einen analytischen Diffeomorphismus $t: I' \longrightarrow I''$, und analytische Abbildungen $T: I' \times V'' \longrightarrow V'$, $J: I' \times V \longrightarrow V''$ derart, daß $t(0) = 0$, T_s ein Isomorphismus von $(V'', [\cdot, \cdot]'')$ auf $(V', [\cdot, \cdot]')$, J_s für alle s linear und bijektiv und J_0 ein Isomorphismus von $(V, [\cdot, \cdot])$ auf $(V'', [\cdot, \cdot]'')$ ist mit $k_s = T_s J_s$ für alle s aus I' . Damit ist k_0 ein Isomorphismus von $(V, [\cdot, \cdot])$ auf $(V', [\cdot, \cdot]')$. Somit gilt: $k_s = id_V, id_{V'}, k_s$, d.h. k ist äquivalent zu einem festen Kontraktor. ■

2.5 Korollar: Ein Kontraktor k ist genau dann trivial, wenn k_0 ein Isomorphismus ist.

Allgemein gilt:

2.6 Lemma: Sei $k: I \times V \rightarrow V'$ Kontraktor von $(V, [,])$ auf $(V', [,'])$; dann ist k_0 ein Homomorphismus von $(V, [,])$ in $(V', [,'])$.

Beweis: k ist analytisch, d^k ist analytisch $\Rightarrow$

$[k_s(x), k_s(y)]' = k_s(d^k(s, x, y)) \xrightarrow{s \rightarrow 0} k_0(d^k(0, x, y)) = k_0([x, y])$. Nun ist aber jede Lie-Struktur analytisch, so daß $[k_s(x), k_s(y)]' \xrightarrow{s \rightarrow 0} [k_0(x), k_0(y)]'$. Also: $[k_0(x), k_0(y)]' = k_0([x, y])$. ■

Für Kontraktoren fallen die Begriffe trivial, lokal-trivial und Regularität von k_0 zusammen. Es ist zu beachten, daß die Kontraktion d^k als Deformation der Lie-Algebra $(V', [,'])$ immer lokal-trivial ist und trivial, wenn k trivial ist. Ist d^k trivial, so sind $(V, [,])$ und $(V', [,'])$ isomorph, aber k braucht nicht trivial zu sein.

Einen Spezialfall eines Kontraktors stellt das Konzept von SALETAN [6] dar: $k_s := u + sv$ mit von s unabhängigen linearen Abbildungen u und v . Noch spezieller ist das Konzept von INÖNÜ und WIGNER [5]: $k_s := P + s(\Pi - P)$, wo P ein Projektor ist. Eine Verallgemeinerung des Konzepts von INÖNÜ und WIGNER ist das von DOEBNER und MELSHEIMER [7]: $k_s = \sum_i s^{m_i} P_i$ mit einem vollständigen Satz paarweise orthogonaler Projektoren P_i . Diese Funktion ist i.a. nicht in s analytisch und somit in unserer Sprechweise kein Kontraktor; falls sie analytisch ist, so ist sie ein einfacher Kontraktor, wie er im folgenden Paragraphen definiert wird.

§3 Einfache Kontraktion von Lie-Algebren

In der Praxis sehen die Kontraktoren meist so aus, daß man die gegebene Lie-Algebra in Unterhalbgebren zerlegt und die Elemente dieser Unterhalbgebren mit einer Potenz des Kontraktionsparameters multipliziert; dem entsprechen zum Beispiel die Konzepte von INÖNÜ und WIGNER [5] und von DOEBNER und MELSHEIMER [7]. Bei Lie-Gruppen versagen solche Verfahren, da Lie-Gruppen i.a. keine lineare Struktur haben. Wir haben daher den Begriff des einfachen Kontraktors entwickelt, der sich ohne weiteres auf Lie-Gruppen übertragen läßt und eine einfache Verallgemeinerung des Kontraktors von INÖNÜ und WIGNER (kurz: IW-Kontraktor) ist.

3.1 Definition: Ein einfacher Kontraktor von $(V, [,])$ auf $(V, [,'])$ ist ein Kontraktor $k: I \times V \rightarrow V$ mit $k_s k_t = k_{st}$ für alle s, t aus I mit st in I . Die Deformation d^k von $(V, [,])$ heißt dann einfache

Kontraktion von $(V, [,]')$.

Einfache Kontraktoren sind also nur für Lie-Algebren auf demselben Vektorraum definiert; das stellt jedoch keine echte Einschränkung dar, da jeder Kontraktor zu einem Kontraktor mit festem Vektorraum äquivalent ist. Für einfache Kontraktoren spielt das Intervall I keine Rolle, da jeder einfache Kontraktor auf $\mathbb{R}$ fortgeführt werden kann.

3.2 Lemma: Sei k ein einfacher Kontraktor; dann gibt es genau einen einfachen Kontraktor $\hat{k} = k \uparrow \mathbb{R}$.

Beweis: Für jedes s aus $\mathbb{R}$ gibt es ein n aus $\mathbb{N}$ mit $1/n$ in I und s/n in I ; wir definieren: $\hat{k}_s := k_{s/n} k_{1/n}^{-1}$. Ist $s \in I$, so folgt aus $k_s k_{1/n} = k_{s/n}$ sofort: $\hat{k}_s = k_s$. $\hat{k}_s$ ist unabhängig von n , denn sei n' aus $\mathbb{N}$ mit $1/n'$ und s/n' in $I \Rightarrow k_{s/n} k_{1/n'} = k_{s/nn'} = k_{s/n'} k_{1/n'}$, $k_{1/n} k_{1/n'} = k_{1/nn'} = k_{1/n} k_{1/n'} \Rightarrow k_{s/n} k_{1/n'}^{-1} = k_{s/n'} k_{1/n'}^{-1} k_{1/n}^{-1} = k_{s/n} k_{1/n}^{-1} k_{1/n'}^{-1} = \hat{k}_s$. Weiter: $\hat{k}_s \hat{k}_t = k_{s/n} k_{1/n}^{-1} k_{t/n} k_{1/n}^{-1} = k_{s/n} k_{t/n} k_{1/n}^{-1} k_{1/n}^{-1} = k_{st/n} k_{1/n}^{-1} k_{1/n}^{-1} = k_{st/nn'} k_{1/nn'}^{-1} = \hat{k}_{st}$. Mit $k_{s/n}$ und $k_{1/n}$ ist auch $\hat{k}_s$ für $s \neq 0$ bijektiv und linear und für jedes s_0 aus I gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine offene Umgebung U von s_0 so, daß $1/n \in I$ und $s/n \in I$ für alle s aus U , so daß mit k_s auch $\hat{k}_s$ für s aus U analytisch ist.

Sei nun $\hat{k}'$ eine weitere Fortführung von k ; dann gilt für ein hinreichend großes n : $\hat{k}'_s = k'_{s/n} k_{1/n}^{-1} = k_{s/n} k_{1/n}^{-1} = \hat{k}_s$. ■

Wir werden uns darum im folgenden nicht mehr um das Intervall I kümmern. Für einfache Kontraktoren gilt der folgende Darstellungssatz.

3.3 Satz: Ein Kontraktor k ist genau dann einfach, wenn es ein vollständiges System $(P_i)_{i=0}^n$ paarweise orthogonaler Projektoren gibt mit $k_s = \sum_{i=0}^n s^i P_i$ für alle s aus $\mathbb{R}$.

Beweis: Offensichtlich ist k einfach, wenn es sich in der angegebenen Form schreiben läßt. Sei k nun einfach; dann gibt es ein offenes Intervall I um 0 mit $I^2 \subseteq I$ und $k_s = \sum_{i=0}^{\infty} s^i B_i$ für alle s aus I , da k analytisch ist. Damit folgt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} s^i B_i \quad \sum_{j=0}^{\infty} t^j B_j \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (st)^i B_i, \text{ und somit } B_i B_j = 0 \text{ für } i \neq j \text{ und}$$

$B_1^2 = B_1$. Da es auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum nur endlich viele von 0 verschiedene paarweise orthogonale Projektoren gibt, ist $B_j = 0$ für $j > n$, n eine feste natürliche Zahl. Damit ist $k_s = \sum_{i=0}^{\infty} s^i P_i$ für $s \in I$ und $P_i := B_i$, so daß diese Form wegen 3.2 für alle Werte von $s \in \mathbb{R}$ angenommen wird. Damit k_s für $s \neq 0$ bijektiv ist muß $(P_i)_{i=0}^n$ vollständig sein.

Ist k ein einfacher Kontraktor mit $k_s = \sum_{i=0}^n s^i P_i$ und $P_n \neq 0$, so heißt n der Grad von k .

3.4 Lemma: Sei k ein einfacher Kontraktor des Grads n , $n = 0, 1$; dann ist jeder zu k lokal-äquivalente einfache Kontraktor auch vom Grad n .

Beweis: Sei $n = 0$; dann ist $k_s = \Pi$, und somit gilt für jeden zu k äquivalenten einfachen Kontraktor k' : $k'_s = \sum_{i=0}^m s^i P'_i = T_s J_s$. Also $P'_0 = T_0 J_0$, und da T_0 und J_0 regulär sind ist auch P'_0 regulär, so daß $P'_0 = \Pi$. Somit $k'_s = \Pi$, also ist der Grad von k' 0.

Sei $n = 1$; dann ist $k_s = P_0 + s P_1$, und somit gilt für jeden zu k äquivalenten einfachen Kontraktor k' : $k'_s = \sum_{i=0}^m s^i P'_i = T_s (P_0 + s P_1) J_s$. Sei n_i die Dimension von $P_i(V)$, n'_i die Dimension von $P'_i(V')$; dann gilt $\sum_{i=0}^m n'_i = n_0 + n_1$, und für die Determinante von k'_s gilt: $s \sum_{i=1}^m i n'_i = t(s) n_1 \det(T_s J_s)$. Aus $P'_0 = T_0 P_0 J_0$ folgt $n'_0 = n_0$ und somit wegen $t(0) = 0$ schließlich: $\sum_{i=1}^m i n'_i = n_1$, also $m = 1$.

Wir vermuten, daß sich diese Aussage für jeden beliebigen Grad n beweisen läßt, jedoch mit größerem Aufwand. Mit Korollar 2.5 läßt sich Lemma 3.4 auch so formulieren: Jeder zum trivialen einfachen Kontraktor lokal-äquivalente einfache Kontraktor ist trivial, jeder zu einem IW-Kontraktor lokal-äquivalente einfache Kontraktor ist ein IW-Kontraktor.

Für einfache Kontraktoren gilt folgender Struktursatz.

3.5 Satz: Sei k ein einfacher Kontraktor von $(V, [,])$ auf $(V, [,]')$; dann gilt:

- i) k_s ist für $s \neq 0$ ein Automorphismus von $(V, [,])$, k_0 ist ein Endomorphismus von $(V, [,])$.
- ii) $k_0(V)$ ist gemeinsame Unteralgebra von $(V, [,])$ und $(V, [,]')$, d.h. $k_0(V)$ trägt als Unteralgebra von $(V, [,])$ und von $(V,$

$[\cdot, \cdot]'$ die gleiche Lie-Struktur.

iii) $k_0^{-1}(0)$ ist ein Ideal von $(V, [\cdot, \cdot])$ und $k_0(V) \cap k_0^{-1}(0) = \{0\}$,
 $(V, [\cdot, \cdot]) = k_0^{-1}(0) \ltimes k_0(V)$, d.h. die Lie-Algebra $(V, [\cdot, \cdot])$ ist
 eine semi-direkte Summe von $k_0^{-1}(0)$ mit $k_0(V)$.

iv) Für $k_s = \sum_{i=0}^n s^i P_i$ folgt:
 $[x, y] = \sum_{i=0}^n P_i \sum_{r=0}^i [P_r x, P_{i-r} y]', \quad P_k \sum_{r=0}^i [P_r x, P_{i-r} y]' = 0$ für
 $0 \leq i < k \leq n$.

Beweis: i) $k_s([x, y]) = k_s(\lim_{t \rightarrow 0} k_t^{-1}([k_t(x), k_t(y)]')) =$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} k_s k_t^{-1}([k_t(x), k_t(y)]') =$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} k_{t/s}^{-1}([k_{t/s}(k_s(x)), k_{t/s}(k_s(y))]') =$
 $= [k_s(x), k_s(y)]$ für $s \neq 0$; damit ist k_s für $s \neq 0$ ein Isomorphismus
 und somit k_0 ein Endomorphismus.

ii) k_0 ist ein Endomorphismus von $(V, [\cdot, \cdot])$ und ein Homomorphismus von
 $(V, [\cdot, \cdot])$ in $(V, [\cdot, \cdot]')$; damit ist $k_0(V)$ eine Unter algebra von $(V, [\cdot, \cdot])$
 und von $(V, [\cdot, \cdot]')$. Nun gilt wegen $k_0^2 = k_0$ für alle x aus $k_0(V)$:
 $x = k_0(x)$. Deshalb: x, y aus $k_0(V) \Rightarrow [x, y] = [k_0(x), k_0(y)] =$
 $= k_0([x, y]) = [k_0(x), k_0(y)]' = [x, y]'$.

iii) k_0 ist ein Endomorphismus von $(V, [\cdot, \cdot]) \Rightarrow k_0^{-1}(0)$ ist ein Ideal.
 x in $k_0(V) \cap k_0^{-1}(0) \Rightarrow x = k_0(x) = 0 \Rightarrow k_0(V) \cap k_0^{-1}(0) = \{0\}$.
 $x \in V \Rightarrow x = (\Pi - k_0)(x) + k_0(x), \quad k_0((\Pi - k_0)(x)) = k_0(x) - k_0^2(x) = 0$
 $\Rightarrow V = k_0^{-1}(0) + k_0(V)$.

iv) $k_s^{-1}([k_s(x), k_s(y)]') = \sum_{k, \ell, i} s^{k+\ell-i} P_i [P_k x, P_\ell y]'$ ist analytisch
 $\Rightarrow \sum_{k+\ell=m} P_i [P_k x, P_\ell y]' = 0$ für alle $0 \leq m < i \leq n$ und
 $[x, y] = \lim_{s \rightarrow 0} k_s^{-1}([k_s(x), k_s(y)]') = \sum_{i=0}^n P_i \sum_{r=0}^i [P_r x, P_{i-r} y]'$.

3.6 Korollar: Ist k ein einfacher Kontraktor von $(V, [\cdot, \cdot])$ auf $(V, [\cdot, \cdot]')$,
 $k_s = \sum_{i=0}^n s^i P_i$, so gilt: $[P_i(V), P_j(V)] \subseteq P_{i+j}(V)$ mit
 $P_k := 0$ für $k > n$ und $k_0^{-1}(0) = (\Pi - P_0)(V)$ ist nilpotent von
 einer Klasse nicht größer als n .

Beweis: Aus 3.5 iv folgt: $[P_i x, P_j y] = \sum_{k=0}^n P_k \sum_{r=0}^k [P_r P_i x, P_{k-r} P_j y]' =$
 $= \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^k \delta_{ir} \delta_{j(k-r)} P_k [P_i x, P_j y]' = P_{i+j} [P_i x, P_j y]' \in P_{i+j}(V)$.

Hieraus folgt: $[(\Pi - P_0)(V), (\Pi - P_0)(V)] \subseteq (\Pi - P_0 - P_1)(V)$,

$[(\Pi - P_0 - P_1)(V), (\Pi - P_0)(V)] \subseteq (\Pi - P_0 - P_1 - P_2)(V)$, und so
 weiter, woraus die Nilpotenz von einer Klasse nicht größer n folgt. ■

§4 Beispiele für die Kontraktion von Lie-Algebren

Bei den folgenden Beispielen handelt es sich nicht um prinzipiell Neues - das wäre auch kaum die Funktion von Beispielen -, sondern um eine Demonstration der Tragfähigkeit unserer Methode an Bekanntem. Wir bringen zunächst drei Beispiele für einfache Kontraktoren des Grades 1, also IW-Kontraktoren, sodann ein Beispiel für einen einfachen Kontraktor des Grades 2 und schließlich ein Beispiel für eine Deformation, die keine Kontraktion ist.

4.1 Kontraktion der $\mathfrak{o}(p,q)$ zur $\mathfrak{io}(p,q-1)$, $q \geq 1$

Die Lie-Strukturen von $\mathfrak{o}(p,q)$ und $\mathfrak{io}(p,q-1)$ definieren wir auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{p+q-1} \oplus \mathfrak{o}(p,q-1)$, wo $\mathfrak{o}(p,q-1)$ der Vektorraum der Matrizen M mit $M^t G = -G M$, $G := (p,q-1)$ -Metrik, ist. Für die Lie-Strukturen gilt:

$$i) \mathfrak{io}(p,q-1): [(x,M), (x',M')] := (Mx' - M'x, [M, M']) \quad \text{und}$$

$$ii) \mathfrak{o}(p,q): [(x,M), (x',M')] := (Mx' - M'x, \mathcal{E} x \mathcal{X} G x' - \mathcal{E} x' \mathcal{X} G x + [M, M'])$$

Dabei ist $\mathcal{E} = +$, falls die (p,q) -Metrik vom Typ $\Pi_p + (-\Pi_q)$ ist, und $\mathcal{E} = -$, falls die (p,q) -Metrik vom Typ $(-\Pi_p) + \Pi_q$ ist. Dem Kontraktor k ,

$$iii) k_s(x, M) := (sx, M),$$

entspricht die Kontraktion d^k ,

$$iv) d^k(s; x, M; x', M') = (Mx' - M'x, \mathcal{E} s^2 x \mathcal{X} G x' - \mathcal{E} s^2 x' \mathcal{X} G x + [M, M']) .$$

4.2 Kontraktion der $\mathfrak{io}(p,q)$ zur $\mathfrak{iio}(p,q-1)_G$, $q \geq 1$

Mit $\mathfrak{iio}(p,q-1)_G$ bezeichnen wir die auf $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{p+q-1} \oplus \mathfrak{io}(p,q-1)$ definierte Lie-Algebra mit der Lie-Struktur

$$i) \mathfrak{iio}(p,q-1)_G: [(x_0, x, y, M), (x'_0, x', y', M')] := \\ = (0, x'_0 y - x_0 y' + Mx' - M'x, My' - M'y, [M, M']) ;$$

die Lie-Algebra $\mathfrak{iio}(p,q-1)_G$ stellt eine Verallgemeinerung der Lie-Algebra der Galileigruppe dar - daher der Index G . Auf demselben Vektorraum soll $\mathfrak{io}(p,q)$ definiert sein und die Lie-Struktur

$$ii) \mathfrak{io}(p,q): [(x_0, x, y, M), (x'_0, x', y', M')] := \\ = (\mathcal{E} y G x' - \mathcal{E} x G y', x'_0 y - x_0 y' + Mx' - M'x, My' - M'y, \mathcal{E} y \mathcal{X} G y' - \mathcal{E} y' \mathcal{X} G y + \\ + [M, M'])$$

tragen, wo G und $\mathcal{E}$ wie in 4.1 definiert sind. Dem Kontraktor k ,

$$\text{iii)} \quad k_{\mathbb{S}}(x_0, x, y, M) := (x_0, sx, sy, M),$$

entspricht die Kontraktion d^k ,

$$\text{iv)} \quad d^k(s; x_0, x, y, M; x'_0, x', y', M') =$$

$$= (\xi s^2 y G x' - \xi s^2 x G y', x'_0 y - x_0 y' + M x' - M' x, M y' - M' y, \xi s^2 y \chi G y' - \xi s^2 y' \chi G y + [M, M'])$$

4.3 Kontraktion der $io(p, q)$ zur $io(p, q-1)_G$, $q \geq 1$

Mit $io(p, q-1)_G$ bezeichnen wir die auf $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{p+q-1} \oplus io(p, q-1)$ definierte Lie-Algebra mit der Lie-Struktur

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad io(p, q-1)_G: \quad & [(x_0, x, y, M), (x'_0, x', y', M')] := \\ & = (\xi y G x' - \xi x G y', M x' - M' x, M y' - M' y, [M, M']), \end{aligned}$$

wo ξ und G wie in 4.1 definiert sind; die Lie-Algebra $io(p, q-1)_G$ stellt eine Verallgemeinerung der Lie-Algebra der Carrollgruppe [8], [9] dar - daher der Index C . Mit $io(p, q)$ wie in 4.2 ii definiert ist k ,

$$\text{iii)} \quad k_{\mathbb{S}}(x_0, x, y, M) := (sx_0, x, sy, M),$$

ein Kontraktor und die zugehörige Kontraktion d^k ist

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad d^k(s; x_0, x, y, M; x'_0, x', y', M') = \\ = (\xi y G x' - \xi x G y', s^2 x'_0 y - s^2 x_0 y' + M x' - M' x, M y' - M' y, \xi s^2 y \chi G y' - \xi s^2 y' \chi G y + [M, M']) \end{aligned}$$

4.4 Kontraktion der $zio(p, q)$ zur $zio(p, q-1)_G$, $q \geq 1$

Mit $zio(p, q-1)_G$ meinen wir die zentrale Erweiterung von $io(p, q-1)_G$ durch $\mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad zio(p, q-1)_G: \quad & [(r, x_0, x, y, M), (r', x'_0, x', y', M')] := \\ & = (\xi y G x' - \xi x G y', 0, x'_0 y - x_0 y' + M x' - M' x, M y' - M' y, [M, M']), \end{aligned}$$

wobei ξ und G wie in 4.1 definiert sind. $zio(p, q)$ soll eine triviale zentrale Erweiterung von $io(p, q)$ durch $\mathbb{R}$ sein (für $p+q > 2$ ist jede zentrale Erweiterung von $io(p, q)$ trivial [10; p.37]):

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad zio(p, q): \quad & [(r, x_0, x, y, M), (r', x'_0, x', y', M')] := \\ & = (\xi y G x' - \xi x G y', \xi y G x' - \xi x G y', x'_0 y - x_0 y' + M x' - M' x, M y' - M' y, \xi y \chi G y' - \xi y' \chi G y + \\ & \quad + [M, M']), \end{aligned}$$

dabei ist $(r, x_0, x, y, M) \mapsto (r - x_0, x_0, x, y, M)$ ein Isomorphismus von $zio(p, q)$ auf $\mathbb{R} \oplus io(p, q)$. Die Abbildung $k: \mathbb{R} \times zio(p, q-1)_G \rightarrow$

$\text{zio}(p, q),$

iii) $k(s; r, x_0, x, y, M) := (s^2 r, x_0, s x, s y, k),$

ist ein einfacher Kontraktor vom Grad 2 und die zugehörige Kontraktion d^k von $\text{zio}(p, q)$ auf $\text{ziio}(p, q-1)_G$ ist

iv) $d^k(s; r, x_0, x, y, M; r', x'_0, x', y', M') =$
 $= (\xi y G x' - \xi x G y', \xi s^2 y G x' - \xi s^2 x G y', x'_0 y - x_0 y' + \hbar x' - M' x, M y' - M' y, [k, k'] + O(s^2))$

Der Term $O(s^2)$ ist derselbe wie in 4.2 iv und in 4.3 iv. Die Lie-Algebra $\text{ziio}(p, q-1)_G$ ist eine Verallgemeinerung der Lie-Algebra der quantenmechanischen Galileigruppe; der Kern von k_0 ist die Heisenberg-Algebra der Dimension $2(p+q-1) + 1$. Interessanterweise enthält $\text{ziio}(p, q-1)_G$ eine zur $\text{iio}(p, q-1)_G$ isomorphe Unteralgebra:

v) $(x_0, x, y, M) \mapsto (x_0, 0, x, y, M)$

definiert einen injektiven Homomorphismus von $\text{iio}(p, q-1)_G$ in $\text{ziio}(p, q-1)_G$.

4.5 Beispiel einer Deformation, die keine Kontraktion ist

Ersetzen wir in 4.1 ii und 4.1 i q durch $q+1$, so erhalten wir die Lie-Algebren $\text{o}(p, q+1)$ und $\text{io}(p, q)$:

i) $\text{o}(p, q+1): [(x, M), (x', M')] := (M x' - M' x, [M, M'] + \xi x \chi G x' - \xi x' \chi G x),$

ii) $\text{io}(p, q): [(x, M), (x', M')] := (M x' - M' x, [M, M']);$

für $\text{o}(p+1, q)$ benutzen wir die Form

iii) $\text{o}(p+1, q): [(x, M), (x', M')] := (M x' - M' x, [M, M'] - \xi x \chi G x' + \xi x' \chi G x).$

Definieren wir nun eine Deformation $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p+q+1} \times \text{o}(p, q) \times \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \text{o}(p, q)$,

iv) $d(s; x, M; x', M') := (M x' - M' x, [M, M'] + s(x \chi G x' - x' \chi G x)),$

so sehen wir, daß $d(\xi 1; \cdot, \cdot)$ die Lie-Struktur von $\text{o}(p, q+1)$ und $d(-\xi 1; \cdot, \cdot)$ die Lie-Struktur von $\text{o}(p+1, q)$ ist. Da die Algebren $\text{o}(p+1, q)$, $\text{io}(p, q)$ und $\text{o}(p, q+1)$ für $p \neq q$ und $p+q \geq 2$ paarweise nicht-isomorph sind, kann d keine Kontraktion sein; beschränkt man aber den Deformationsparameter auf ein Vorzeichen, so erhält man dieselbe Schar von Lie-Algebren wie bei der Kontraktion der $\text{o}(p, q+1)$ bzw. $\text{o}(p+1, q)$ auf die $\text{io}(p, q)$ - vergleiche 4.1.

Kapitel 2: Deformation und Kontraktion von Lie-Gruppen

§1 Deformation von Lie-Gruppen

Ähnlich wie wir die Deformation einer Lie-Algebra als Schar von Lie-Strukturen auf einem Vektorraum definiert haben, führen wir die Deformation einer Lie-Gruppe als Schar von Gruppenstrukturen auf einer Mannigfaltigkeit ein. Eine Gruppenstruktur kann auf verschiedene Weisen beschrieben werden: neben der üblichen Multiplikation $(g, g') \mapsto gg'$ ist die Verknüpfung $(g, g') \mapsto gg'^{-1}$ besonders zweckmäßig, weil sich dafür topologische und analytische Eigenschaften besonders leicht formulieren und untersuchen lassen. Die Axiome einer solchen Verknüpfung sind die folgenden.

1.1 Definition: Eine Verknüpfung auf einer nicht-leeren Menge M ist eine Abbildung $v: M \times M \rightarrow M$ mit den Eigenschaften:

- i) Es gibt ein $e \in M$ mit $v(g, g) = e$ und $v(g, e) = g$ für alle g aus M ;
- ii) $v(v(g_1, g_2), g_3) = v(g_1, v(g_3, v(e, g_2)))$ für alle g_1, g_2, g_3 aus M .

e heißt das Einselement von v .

Die Forderung (ii) entspricht der Assoziativität der Gruppenmultiplikation. Ist eine Verknüpfung v gegeben, so entspricht ihr die Multiplikation m_v ,

1.2 $m_v(g, g') := v(g, v(e, g'))$ für g, g' aus M ;

umgekehrt entspricht der Multiplikation m die Verknüpfung v_m ,

1.3 $v_m(g, g') := m(g, g'^{-1})$ für g, g' aus M .

Im folgenden werden wir sowohl Multiplikationen als auch Verknüpfungen benutzen, wie es für die Formulierung unserer Aussagen gerade passend ist.

Eine Gruppe ist ein Paar (M, v) , wo M eine nicht-leere Menge und v eine Verknüpfung auf M ist; eine Lie-Gruppe ist ein Paar (M, v) , wo M eine analytische Mannigfaltigkeit ist und v eine analytische Verknüpfung auf M .

1.4 Definition: Sei (M, v) eine Lie-Gruppe und I ein offenes Intervall um 0; dann ist eine Deformation von (M, v) eine analytische Abbildung $D: I \times M \times M \rightarrow M$ derart, daß $D(s, \dots)$ für alle s aus I

eine Verknüpfung und $D(0, \dots) = v$ ist.

Analog zu 1.1.4 und dem folgenden erklärt man die Äquivalenz und lokale Äquivalenz zweier Deformationen (wobei J_s jetzt ein analytischer Diffeomorphismus sein muß) sowie die Beschränkung und Fortführung einer Deformation. Die feste Deformation F einer Lie-Gruppe ist

1.5 $F: I \times M \times M \rightarrow M$, $F(s, \dots) := v$ für s aus I .

Eine Deformation heißt trivial bzw. lokal-trivial, wenn sie äquivalent bzw. lokal-äquivalent zu einer festen Deformation ist.

Jeder Lie-Gruppe $(M, D(s, \dots))$ entspricht eine Lie-Algebra im Tangentialraum an der Stelle e_s [11; p.89]; somit haben wir bereits eine Schar von Lie-Algebren. Jedoch sind diese Lie-Algebren i.a. auf verschiedenen Vektorräumen definiert, da das Einselement nicht für alle Verknüpfungen $D(s, \dots)$ das selbe zu sein braucht. Wir müssen also diese Tangentialräume ineinander transformieren; das machen wir mit Hilfe der Linkstranslationen auf der Gruppe (M, v) . Auf diese Weise erhalten wir dann eine Deformation der Lie-Algebra von (M, v) .

1.6 Satz: Sei $D: I \times M \times M \rightarrow M$ eine Deformation der Lie-Gruppe (M, v) , e_s das Einselement der Verknüpfung $D(s, \dots)$, $e := e_0$, T_s der Tangentialraum von M in e_s , $T := T_0$, $[\cdot, \cdot]_s'$ die von $D(s, \dots)$ auf T_s erzeugte Lie-Struktur, $[\cdot, \cdot] := [\cdot, \cdot]_0'$ und L_s die Linkstranslation um e_s bezüglich v . Dann ist $\partial D: I \times T \times T \rightarrow T$,
 $\partial D(s, x, y) := [x, y]_s := dL_s(e)^{-1} [dL_s(e)x, dL_s(e)y]_s'$,
 eine Deformation der Lie-Algebra $(T, [\cdot, \cdot])$ von (M, v) .

Beweis: Offensichtlich ist $[\cdot, \cdot]_s$ für alle s eine Lie-Struktur auf T und $[\cdot, \cdot]_0 = [\cdot, \cdot]$, so daß nur noch die Analytizität von ∂D zu beweisen ist. Sei $\exp$ die Exponentialabbildung von $(T, [\cdot, \cdot])$ in (M, v) und $f: I \times T \times T \rightarrow T$,

$$f(s, x, y) := \left. \frac{d^2}{dt^2} \exp^{-1}(e_s^{-1} m_s(e_s \exp(tx), e_s \exp(ty))) \right|_{t=0};$$

dabei ist m_s die der Verknüpfung $D(s, \dots)$ gemäß 1.2 entsprechende Multiplikation und die Produkte $e_s \exp(tx)$, $e_s^{-1} m_s(\dots)$ usw. sind bezüglich m_0 ausgeführt. Die Funktion f ist wohldefiniert, da das Argument von $\exp^{-1}$ in jeder beliebig klein gewählten Umgebung von e liegt; f ist analytisch, da es für alle x, y aus T offene Umgebungen von x und y sowie von $0 \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ gibt derart,

daß $\exp^{-1}(e_s, {}^{-1}m_s, (e_s, \exp(tx'), e_s, \exp(ty')))$ für x', y' und t, s' in diesen Umgebungen analytisch ist. Sei $\exp_s$ die Exponentialabbildung von $(T_s, [\cdot]'_s)$ in $(M, D(s, \dots))$; dann:

$$f(s, x, y) = \frac{d^2}{dt^2} \exp^{-1}(e_s {}^{-1} \exp_s (\exp_s {}^{-1} (m_s (e_s \exp(tx), e_s \exp(ty)))) \Big|_{t=0} = \\ = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \exp^{-1}(e_s {}^{-1} \exp_s (U))}{\partial U_i \partial U_j} \Big|_{U=0} z_i z_j + \sum_i \frac{\partial \exp^{-1}(e_s {}^{-1} \exp_s (U))}{\partial U_i} \Big|_{U=0} z_i,$$

mit $z := \frac{d}{dt} \exp_s {}^{-1} (m_s (e_s \exp(tx), e_s \exp(ty))) \Big|_{t=0}$ und

$Z := \frac{d^2}{dt^2} \exp_s {}^{-1} (m_s (e_s \exp(tx), e_s \exp(ty))) \Big|_{t=0}$. Nun ist aber

$$\frac{\partial \exp^{-1}(e_s {}^{-1} \exp_s (U))}{\partial U} \Big|_{U=0} = dL_{e_s} (e_s) = dL_s (e) {}^{-1} \text{ und } \exp_s {}^{-1} (e_s \exp(tx)) \\ = tdL_s (e)x + g_s (tx), \text{ wo } g_s \text{ eine analytische Funktion ist mit } g_s (0) = \\ = 0 \text{ und } \frac{d}{dt} g_s (tx) \Big|_{t=0} = 0. \text{ Also } e_s \exp(tx) = \exp_s (tdL_s (e)x + g_s (tx)) \\ \text{ und } m_s (e_s \exp(tx), e_s \exp(ty)) = \exp_s (tdL_s (e)(x+y) + g_s (tx) + g_s (ty) + \\ \frac{t^2}{2} [dL_s (e)x, dL_s (e)y]'_s + O(t^3)),$$

somit $z = dL_s (e)(x+y)$ und $Z = [dL_s (e)x, dL_s (e)y]'_s +$

$$+ \frac{d^2}{dt^2} (g_s (tx) + g_s (ty)) \Big|_{t=0}. \text{ Damit erhalten wir: } \partial D(s, x, y) =$$

$(f(s, x, y) - f(s, y, x))/2$, so daß mit f auch ∂D analytisch ist. ■

Es gilt: $(\partial D) \downarrow I = \partial(D \downarrow I)$ und $(\partial D) \uparrow I = \partial(D \uparrow I)$. Wie bei den Lie-Algebren sagen wir, daß sich eine Lie-Gruppe (M', v') durch eine beliebig kleine Deformation aus der Lie-Gruppe (M, v) erzeugen läßt, wenn es eine Deformation $D: I \times M \times M \rightarrow M$ von (M, v) gibt derart, daß es zu jedem $t \neq 0$ ein r aus I mit $|r| \leq |t|$ und (M', v') isomorph zu $(M, D(r, \dots))$ gibt.

Eine Lie-Gruppe heißt starr, wenn jede ihrer Deformationen lokal-trivial ist. Damit stellt sich wegen 1§1.6 die Frage: Ist jede halb-einfache Lie-Gruppe starr? Aus 1.6 folgt, daß die Verknüpfungen $D(s, \dots)$ für hinreichend kleine s lokal-isomorph sind, so daß zu zeigen bliebe, daß die Isomorphie global ist und die Isomorphismenschar, die $D(s, \dots)$ erzeugt, für hinreichend kleine s analytisch ist; wir wollen dem aber hier nicht weiter nachgehen.

Satz 1.6 zeigt zum einen die Entsprechung des gruppentheoretischen Deformationsbegriffs mit dem algebraischen

Deformationsbegriff — analog der Entsprechung der Homomorphie von Lie-Gruppen und der ihrer Lie-Algebren —, zum anderen gibt er uns ein Verfahren zur Hand, die Deformationen einer Lie-Gruppe zu ermitteln: Zunächst suche man die Deformationen ihrer Lie-Algebra auf, und untersuche dann, welche dieser Deformationen durch Deformationen der Lie-Gruppe gemäß 1.6 erzeugt sind. Die beim zweiten Schritt auftretenden Probleme werden allerdings i.a. durchaus nicht trivial sein; denn es existieren z. B. Lie-Gruppen, die lokal-isomorph und diffeomorph, aber nicht isomorph sind, so daß man sich nicht auf die Untersuchung von Äquivalenzklassen von Deformationen der Lie-Algebra beschränken kann.

§2 Kontraktion von Lie-Gruppen

Wir führen jetzt einen Kontraktionsbegriff für Lie-Gruppen ein, der dem in 1.2.1 für Lie-Algebren definierten entspricht. Ansätze zu solch einem Kontraktionsbegriff finden sich bei SALETAN [6] und bei MICKELSSON und NIEDERLE [12]; bei SALETAN sind aber die topologischen Bedingungen nicht näher präzisiert, von MICKELSSON und NIEDERLE unterscheiden wir uns darin, daß bei uns die Kontraktoren global definiert und analytisch sein sollen.

2.1 Definition: Ein Kontraktor K von der Lie-Gruppe (M, v) auf die Lie-Gruppe (M', v') ist eine analytische Abbildung $K: I \times M \rightarrow M'$ mit

- i) $K_s := K(s, \cdot)$ ist für $s \neq 0$ ein Diffeomorphismus;
 - ii) $D^K: I \times M \times M \rightarrow M$, $D^K(s, g, g') := K_s^{-1}(v'(K_s(g), K_s(g')))$ für $s \neq 0$ und $D^K(0, \cdot, \cdot) := v$, ist eine Deformation von (M, v) .
- D^K heißt Kontraktion von (M', v') .

Die Analytizität von D^K für $s \neq 0$ ist bereits durch die von K gewährleistet, denn K_s ist für $s \neq 0$ ein analytischer Diffeomorphismus.

Gibt es einen Kontraktor von (M, v) auf (M', v') , so läßt sich offensichtlich (M', v') durch eine beliebig kleine Deformation aus (M, v) erzeugen. Wie für die Kontraktoren von Lie-Algebren definieren wir:

2.2 Definition: Zwei Kontraktoren $K^{(i)}: I_i \times M_i \rightarrow M'_i$, $i = 1, 2$, sind äquivalent, wenn es einen analytischen Diffeomorphismus $t: I_2 \rightarrow$

I_1 und analytische Abbildungen $T: I_2 \times M'_1 \rightarrow M'_2$, $J: I_2 \times M_2 \rightarrow M_1$ gibt mit

i) $t(0) = 0$;

ii) $T_s := T(s, \cdot)$ ist für alle s aus I_2 ein Isomorphismus von (M'_1, v'_1) auf (M'_2, v'_2) , $J_s := J(s, \cdot)$ ist für alle s aus I_2 ein Diffeomorphismus und J_0 ist ein Isomorphismus von (M_2, v_2) auf (M_1, v_1) ;

iii) $K_s^{(2)} = T_s \circ K_t^{(1)} \circ J_s$ für alle s aus I_2 .

Das Paar (t, J) erzeugt dann eine Äquivalenztransformation von $D^K^{(1)}$ auf $D^K^{(2)}$.

Ein fester Kontraktor einer Lie-Gruppe (M, v) ist definiert durch $fK: I \times M \rightarrow M$, $fK_s := \text{id}_M$; dann ist D^{fK} eine feste Deformation von (M, v) . Definieren wir Beschränkung und Fortführung und lokale Äquivalenz von Kontraktoren von Lie-Gruppen entsprechend den Begriffen für Lie-Algebren (siehe nach 1§2.3), so gilt: $D^K \downarrow I = D^K \downarrow I$ und $D^K \uparrow I = D^K \uparrow I$. Ein Kontraktor heißt trivial bzw. lokal-trivial, wenn er äquivalent bzw. lokal-äquivalent zu einem festen Kontraktor ist.

2.3 Lemma: Sei $K: I \times M \rightarrow M'$ ein Kontraktor von (M, v) auf (M', v') und e bzw. e' das Einselement von v bzw. v' ; dann ist K_0 ein analytischer Homomorphismus von (M, v) in (M', v') und die Abbildungen

i) $E: I \rightarrow M$, $E(s) := K_s^{-1}(e')$ für $s \neq 0$ und $E(0) := e$, sowie

ii) $E': I \rightarrow M'$, $E'(s) := K_s(e)$ für alle s aus I ,

sind analytisch.

Beweis: Daß K_0 ein Homomorphismus ist, beweist man analog zu 1§2.6. $E(s) = D^K(s, e, e) \Rightarrow E$ ist analytisch; K ist analytisch $\Rightarrow E'$ ist analytisch.

Es gibt ein Analogon zu den Aussagen 1§2.4 und 1§2.5 über die Trivialität von Lie-Algebra-Kontraktoren für die Kontraktoren von Lie-Gruppen:

2.4 Lemma: Sei $K: I \times M \rightarrow M'$ ein Kontraktor von (M, v) auf (M', v') ; dann sind die Aussagen (i) bis (iv) äquivalent:

i) K ist trivial;

ii) K ist lokal-trivial;

iii) K_0 ist ein analytischer Isomorphismus von (M, v) auf (M', v') ;

iv) K_0 ist injektiv.

Wenn die Zusammenhangskomponenten von M endlich-zusammenhängend sind, ist darüberhinaus (i) bis (iv) äquivalent zu (v):

v) K_0 ist surjektiv.

Beweis: Wir zeigen: (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv), und schließlich: (v) $\Rightarrow$ (iv), (iii) $\Rightarrow$ (v); dabei sind (i) $\Rightarrow$ (ii) und (iii) $\Rightarrow$ (v) trivial.

"(iv) $\Rightarrow$ (iii)": Nach 2.3 ist K_0 ein Homomorphismus $\Rightarrow dK_0(e)$ ist ein injektiver Homomorphismus von $(T, [,])$ in $(T', [,])$, den Lie-Algebren von (M, v) bzw. (M', v') . Da M und M' diffeomorph sind, haben T und T' die gleiche Dimension, so daß $dK_0(e)$ ein Isomorphismus ist. Es gibt also eine Umgebung U von e derart, daß $\exp' \circ dK_0(e) \circ \exp^{-1}|_U = K_0|_U$ ein analytischer Diffeomorphismus von U auf die Umgebung $K_0(U)$ von $e' \in M'$ ist; damit folgt: $K_0(M)$ enthält die Einskomponente von (M', v') .

Nun ist $K(., g)$ analytisch, so daß $K_0(g)$ in derselben Zusammenhangskomponente liegt wie $K_s(g)$; daraus folgt, weil $K(s, .)$ für $s \neq 0$ ein analytischer Diffeomorphismus ist: $K_0(M)$ enthält von jeder Zusammenhangskomponente von M' mindestens ein Element. Somit ist K_0 surjektiv.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)": Sei $t := \text{id}_I$, $T: I \times M' \rightarrow M'$, $T_s := \text{id}_{M'}$, $J: I \times M \rightarrow M'$, $J_s := K_s$. Dann gilt: $K_s = T_s \circ \text{id}_{M'} \circ J_s$, d.h. K ist trivial.

"(ii) $\Rightarrow$ (iv)": Es gibt ein offenes Intervall $U \subseteq I$ und analytische Abbildungen $T: U \times M \rightarrow M'$, $J: U \times M \rightarrow M''$ derart, daß T_s und J_s für alle s aus U Diffeomorphismen sind und $K_s = T_s \circ J_s$. Somit ist $K_0 = T_0 \circ J_0$ injektiv.

"(v) $\Rightarrow$ (iv)": K_0 ist surjektiv $\Rightarrow dK_0(e)$ ist surjektiv $\Rightarrow dK_0(e)$ ist injektiv $\Rightarrow K_0^{-1}(e')$ ist diskret. Sei M_e die Einskomponente von M und M'_e die Einskomponente von M' . Weil für alle $g \in K_0^{-1}(e')$: $K_s(g) \xrightarrow{s \rightarrow 0} e'$, gilt: $K_s(g) \in M'_e$, für alle $g \in K_0^{-1}(e')$ und alle s aus I , also $M_0^{-1}(e') \subseteq K_0^{-1}(M'_e) = M_e$. Wegen der Surjektivität von K_0 ist $K_0(M_e) = M'_e$, und somit existiert ein analytischer Isomorphismus von $M_e/K_0^{-1}(e')$ auf M'_e . Sei F die Fundamentalgruppe von M_e , F' die von M' ; da M_e und M'_e diffeomorph sind, gilt: $\text{card}(F) = \text{card}(F')$

und da $M_e/K_0^{-1}(e')$ zu M'_e diffeomorph ist, gilt: $\text{card}(F') = \text{card}(F)\text{card}(K_0^{-1}(e'))$. Da nach Voraussetzung F endlich ist, folgt: $\text{card}(K_0^{-1}(e')) = 1$, d.h. K_0 ist injektiv.

Abschließend wollen wir die einer Kontraktion einer Lie-Gruppe zugehörige Kontraktion ihrer Lie-Algebra konstruieren.

2.5 Satz: Sei $K:I \times M \longrightarrow M'$ ein Kontraktor von (M, v) auf (M', v') , $(T, [,])$ und $(T', [,])$ die Lie-Algebren von (M, v) bzw. (M', v') und L_s die Linkstranslation um das Element $E(s)$ (siehe 2.3i) bezüglich v . Dann ist $\partial K: I \times T \longrightarrow T'$, $\partial K(s, x) := d(K_s \circ L_s)(e)x$, ein Kontraktor von $(T, [,])$ auf $(T', [,])$ und $d \partial K = \partial D^K$.

Beweis: Da K_s und L_s für $s \neq 0$ Diffeomorphismen sind, ist ∂K_s für $s \neq 0$ bijektiv; da K und E analytisch sind, ist auch ∂K analytisch. Weiter gilt nach 1.6: $\partial D^K(s, x, y) = dL_s(e)^{-1} [dL_s(e)x, dL_s(e)y]'_s = dL_s(e)^{-1} dK_s(E(s))^{-1} [dK_s(E(s))dL_s(e)x, dK_s(E(s))dL_s(e)y]' = d(K_s \circ L_s)(e)^{-1} [d(K_s \circ L_s)(e)x, d(K_s \circ L_s)(e)y]' = d \partial K(s, x, y)$ für $s \neq 0$, $\partial D^K(0, x, y) = [x, y] = d \partial K(0, x, y)$; somit ist $d \partial K$ eine Deformation von $(T, [,])$ und damit ∂K ein Kontraktor.

Wie für die Deformationen gilt auch hier: $(\partial K) \uparrow I = \partial(K \uparrow I)$, $(\partial K) \downarrow I = \partial(K \downarrow I)$.

§3 Einfache Kontraktion von Lie-Gruppen

Wie für Lie-Algebren können wir nun einfache Kontraktoren von Lie-Gruppen definieren:

3.1 Definition: Ein Kontraktor $K:I \times M \longrightarrow M$ von der Lie-Gruppe (M, v) auf die Lie-Gruppe (M, v') ist einfach, wenn für alle s, t aus I mit st in I gilt: $K_s \circ K_t = K_{st}$. Die Deformation D^K von (M, v) heißt dann einfache Kontraktion von (M, v') .

Daß einfache Kontraktoren nur für Lie-Gruppen auf derselben Mannigfaltigkeit $M = M'$ definiert sind, ist keine wesentliche Einschränkung, da jeder Kontraktor zu einem Kontraktor mit $M = M'$ äquivalent ist.

3.2 Lemma: Sei $K:I \times M \longrightarrow M$ einfacher Kontraktor; dann gibt es genau einen einfachen Kontraktor $\hat{K}$ mit $\hat{K} = K \uparrow R$.

Beweis: verläuft völlig analog zu dem von 1§3.2

Auch bei den einfachen Kontraktoren von Lie-Gruppen brauchen wir uns also nicht um das Intervall I zu kümmern.

3.3 Lemma: Ist K ein einfacher Kontraktor, so auch ∂K .

Beweis: K einfach $\Rightarrow E(s) = e$ (vgl. 3.4) $\Rightarrow \partial K_s = dK_s(e) \Rightarrow \partial K_s \partial K_t = dK_s(e) dK_t(e) = d(K_s \circ K_t)(e) = dK_{st}(e) = \partial K_{st}$, denn nach 3.4 ii ist $K_t(e) = e$ für alle t .

Für einfache Kontraktoren von Lie-Gruppen gilt der folgende Struktursatz.

3.4 Satz: Sei $K: I \times M \rightarrow M$ ein einfacher Kontraktor von (M, v) auf (M, v') , e und e' die Einselemente von v bzw. v' und E und E' wie in 2.3. Dann gilt:

- i) K_s ist für $s \neq 0$ ein Automorphismus von (M, v) , K_0 ist ein Endomorphismus von (M, v) .
- ii) $E(s) = E'(s) = e = e'$.
- iii) $K_0(M)$ ist eine gemeinsame abgeschlossene Untergruppe von (M, v) und (M, v') , d.h. $K_0(M)$ ist Untergruppe bezüglich der Verknüpfungen v und v' , und v und v' stimmen auf $K_0(M)$ überein; $K_s|_{K_0(M)} = \text{id}_{K_0(M)}$ für alle s .
- iv) $K_0^{-1}(e)$ ist ein einfach zusammenhängender Normalteiler und $K_s(K_0^{-1}(e)) = K_0^{-1}(e)$ für alle $s \neq 0$.
- v) $K_0(M) \cap K_0^{-1}(e) = \{e\}$, $(M, v) = K_0^{-1}(e) \ltimes K_0(M)$, d.h. (M, v) ist ein semi-direktes Produkt von $K_0^{-1}(e)$ mit $K_0(M)$.
- vi) Ist K_0 injektiv oder surjektiv, so ist $K_s = \text{id}_M$ für alle s .

Beweis: (i) beweist man völlig analog zu 1§3.5i.

(ii) K_0 ist ein Endomorphismus von (M, v) und ein Homomorphismus in $(M, v') \Rightarrow E(0) = e = K_0(e) = e' = E'(0)$; für $s \neq 0$ ist K_s ein Automorphismus von (M, v) und somit $E'(s) = K_s(e) = e = K_s^{-1}(e) = E(s)$.

(iii) K_0 ist ein Endomorphismus von (M, v) und ein Homomorphismus in $(M, v') \Rightarrow K_0(M)$ ist Untergruppe bzgl. v und bzgl. v' ; $K_0(M)$ ist eine gemeinsame Untergruppe, da $K_s(K_0(g)) = K_s \circ K_0(g) = K_0(g)$, also

$$v(g, g') = \lim_{s \rightarrow 0} K_s^{-1}(v'(K_s(g), K_s(g'))) = \lim_{s \rightarrow 0} K_s^{-1}(v'(g, g')) = \\ = \lim_{s \rightarrow 0} v'(g, g') = v'(g, g') \text{ für } g, g' \text{ aus } K_0(M).$$

Sei $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $K_0(M)$ mit $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \in M$; wegen $K_0^2 =$

$= K_0$ und der Stetigkeit von K_0 gilt dann: $K_0(g) = K_0(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} K_0(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$, d.h. $g \in K_0(M)$, also ist $K_0(M)$ abge-
 schlossen.

(iv) Sei $g \in K_0^{-1}(e)$: dann $K_0(g) = e \Rightarrow K_0(K_S(g)) = K_0(g) = e \Rightarrow$
 $K_S(g) \in K_0^{-1}(e)$; nun folgt aus $K_1 \circ K_1 = K_1$ und K_1 bijektiv: $K_1 = \text{id}_M$,
 somit ist $s \mapsto K_S(g)$ ein Weg in $K_0^{-1}(e)$, der e und g verbindet,
 d.h. $K_0^{-1}(e)$ ist zusammenhängend. Sei $f: [0,1] \rightarrow K_0^{-1}(e)$ irgendein
 Weg mit $f(0) = f(1) = e$; dann ist $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow K_0^{-1}(e)$,
 $F(s,t) := K_S(f(t))$, stetig und $F(0,t) = e$, $F(1,t) = f(t)$, also ist
 $K_0^{-1}(e)$ einfach zusammenhängend.

(v) $g \in K_0(M) \cap K_0^{-1}(e) \Rightarrow g = K_0(g) = e \cdot g \in M \Rightarrow (gK_0(g)^{-1})K_0(g)$
 $= g$ und $K_0(gK_0(g)^{-1}) = K_0(g)K_0(g)^{-1} = e$, also $M \subseteq K_0^{-1}(e) \cdot K_0(M)$.

(vi) K_0 ist injektiv $\Rightarrow$ es gibt eine Abbildung $f: M \rightarrow M$ mit $f \circ K_0 =$
 $= \text{id}_M \Rightarrow K_S = \text{id}_M \circ K_S = f \circ (K_0 \circ K_S) = f \circ K_0 = \text{id}_M$; ist K_0 surjektiv, so
 gibt es ein f mit $K_0 \circ f = \text{id}_M$ etc. ■

Den Grad eines einfachen Kontraktors können wir nicht direkt er-
 klären; denn ein einfacher Kontraktor einer Lie-Gruppe liegt i.a.
 nicht in der Form 1§3.3 vor. Wir führen darum den Grad über die Lie-
 Algebra ein.

3.5 Definition: Der Grad eines einfachen Kontraktors K ist der Grad
 von $\mathcal{O}K$; ein Inönü-Wigner-Kontraktor (kurz: IW-Kontraktor) ist
 ein einfacher Kontraktor vom Grad 1.

Wegen 1§3.4 ist unsere Definition eines IW-Kontraktors unabhängig
 von der Wahl der Zuordnung einer Lie-Algebra zu einer Lie-Gruppe.
 Wir erhalten überdies

3.6 Korollar: Ist K ein einfacher Kontraktor von (M,v) auf (M,v') ,
 so ist $K_0^{-1}(e)$ ein einfach zusammenhängender nilpotenter Nor-
 malteiler von (M,v) ; dabei ist die Klasse der Nilpotenz nicht
 größer als der Grad von K .

Beweis: $K_0^{-1}(e)$ ist in der Lie-Algebra von (M,v) das Ideal $\mathcal{O}K_0^{-1}(0)$
 zugeordnet, und dieses ist nach 1§3.6 nilpotent von einer Klasse
 nicht größer als der Grad von $\mathcal{O}K$. Nach [13;p.100] ist $K_0^{-1}(e)$ dann
 nilpotent von der selben Klasse wie $\mathcal{O}K_0^{-1}(0)$. ■

Nach [13;p.76] ist die Exponentialfunktion von einer nilpotenten
 Lie-Algebra in eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe ein analyti-

scher Diffeomorphismus. Es gibt also einen analytischen Isomorphismus von jeder einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppe (M, v) auf eine auf ihrem Tangentialraum T definierte nilpotente Lie-Gruppe (T, v') , deren Exponentialfunktion linear ist: man definiere einfach die Verknüpfung v' auf T wie folgt:

$$3.7 \quad v'(x, y) := \exp^{-1}(v(\exp(x), \exp(y))) .$$

Nach [11; p.100] folgt dann: $\exp'(d\exp^{-1}(e)x) = \exp^{-1}(\exp(x)) = x$, also $\exp'(x) = (d\exp^{-1}(e))^{-1}x$. Die Lie-Algebra von (T, v') ist auf dem Tangentialraum im Ursprung von T definiert. Für die Verknüpfung 3.7 gilt wegen der Eigenschaften der Exponentialfunktion, insbesondere der Baker-Campbell-Hausdorff-Formeln [13; p.78]:

$$3.8 \quad i) \quad v'(sx, tx) = (s-t)x \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R} \text{ und alle } x \in T,$$

$$ii) \quad v'(tx, ty) = t(x - y) - \frac{t^2}{2}[x, y] + O(t^3) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und alle } x, y \in T.$$

Hieraus ist leicht ersichtlich, daß jeder Automorphismus von v' linear sein muß und ein Automorphismus der Lie-Struktur $[,]$. Umgekehrt ist auch jeder Automorphismus der Lie-Struktur $[,]$ ein Automorphismus von v' , da sich die Terme höherer Ordnung in 3.8 ii aus Kommutatoren höherer Ordnung zusammensetzen. Damit folgt: $\text{Aut}(T, v') = \text{Aut}(T, [,])$, und somit ist $\text{Aut}(T, v')$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\text{GL}(T)$.

Statt wie in 3.7 die Verknüpfung einer einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe (M, v) auf ihren Tangentialraum T zu übertragen, können wir auch die lineare Struktur von T auf M übertragen:

$$3.9 \quad i) \quad sg := \exp(s \exp^{-1}(g)) \text{ für alle } s \in \mathbb{R} \text{ und alle } g \in M;$$

$$ii) \quad g + g' := \exp(\exp^{-1}(g) + \exp^{-1}(g')) \text{ für alle } g, g' \in M .$$

Dann erfüllt v auf M zu 3.8 analoge Relationen mit der Lie-Struktur $[,]'$,

$$3.10 \quad [g, g']' := \exp([\exp^{-1}(g), \exp^{-1}(g')]),$$

so daß $\text{Aut}(M, v)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\text{GL}(M)$ ist.

Um einen Darstellungssatz für einfache Kontraktoren von Lie-Gruppen formulieren zu können, brauchen wir eine Verallgemeinerung des Begriffs der Gruppen-Inhomogenisierung von BERZI und GORINI [14]:

3.11 Definition: Eine Inhomogenisierung der Klasse k einer Lie-Gruppe (H, v) ist ein semi-direktes Produkt von (H, v) mit einer einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe (V, n) , die nilpotent von der Klasse k ist und eine gemäß 3.9 mit n verträgliche lineare Struktur trägt.

Eine Inhomogenisierung der Klasse 1 ist also gerade eine Inhomogenisierung im Sinne von BERZI und GORINI. Im folgenden schreiben wir einfach "Inhomogenisierung" für "Inhomogenisierung der Klasse 1".

3.12 Satz: Ist K ein einfacher Kontraktor vom Grad n von (M, v) auf (M, v') , so gibt es auf dem Normalteiler $K_0^{-1}(e)$ eine lineare Struktur, die (M, v) zu einer Inhomogenisierung der Klasse $k \leq n$ von $K_0(M)$ macht derart, daß K von der Form

$$K_S(x, h) = \left(\sum_{i=1}^n s^i P_i x, h \right), \quad x \in K_0^{-1}(e), \quad h \in K_0(M),$$

ist, wo $(P_i)_{i=1}^n$ ein vollständiges System von paarweise orthogonalen Projektoren auf $K_0^{-1}(e)$ ist.

Beweis: Nach 3.4v können wir jedes Element von M in der Form xh mit $x \in K_0^{-1}(e)$ und $h \in K_0(M)$ schreiben; wegen 3.4i und 3.4iii gilt:
 $K_S(xh) = K_S(x)K_S(h) = K_S(x)h$. Wegen 3.6 können wir auf $K_0^{-1}(e)$ gemäß 3.9 eine lineare Struktur definieren, die (M, v) zu einer Inhomogenisierung der Klasse $k \leq n$ von $K_0(M)$ macht. Wegen $K_S(K_0^{-1}(e)) \subseteq K_0^{-1}(e)$ können wir analog zu dem Beweis von 1.3.3 zeigen:

$K_S(x) = \sum_{i=1}^m s^i P_i x$ für $x \in K_0^{-1}(e)$ mit dem vollständigen System $(P_i)_{i=1}^m$ von Projektoren auf $K_0^{-1}(e)$. Hieraus ergibt sich aber:

$\partial K_S / \partial K_0^{-1}(0) = \sum_{i=1}^m s^i P_i'$ mit zu P_i äquivalenten Projektoren P_i' , also muß $m = n$ gelten für $P_m \neq 0$. ■

Jedem Kontraktor einer Lie-Gruppe entspricht ein Kontraktor ihrer Lie-Algebra gemäß 2.5; für IW-Kontraktoren läßt sich diese Zuordnung umkehren.

3.13 Satz: Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, (M, v) und (M, v') Lie-Gruppen und $(T, [,])$ bzw. $(T', [,'])$ die Lie-Algebren von (M, v) bzw. (M, v') ; dann gibt es genau dann einen IW-Kontraktor von (M, v) auf (M, v') , wenn

- i) (M, v) und (M, v') eine gemeinsame abgeschlossene Untergruppe (H, v_H) haben und (M, v) eine Inhomogenisierung von (H, v_H)

mit einer Vektorgruppe $(V, +)$ ist;

- ii) es einen IW-Kontraktor $k: \mathbb{R} \times T \longrightarrow T'$ von $(T, [\cdot, \cdot])$ auf $(T', [\cdot, \cdot])$ gibt derart, daß $k_0(T)$ gleich der (H, v_H) zugeordnete Unteralgebra und $k_0^{-1}(0)$ gleich dem $(V, +)$ zugeordneten Ideal von $(T, [\cdot, \cdot])$ ist.

Beweis: Die Notwendigkeit folgt aus 3.12 mit $k = \partial K$; bleibt zu zeigen, daß (i) und (ii) hinreichend sind. Da (M, v) und (M, v') eine gemeinsame Untergruppe haben, sind ihre Einselemente gleich und also $T = T'$. Da k ein IW-Kontraktor von $(T, [\cdot, \cdot])$ auf $(T, [\cdot, \cdot])$ ist, gilt: $k_s = P_0 + sP_1$; dabei ist P_0 ein Projektor auf die (H, v_H) zugeordnete Unteralgebra, P_1 ein Projektor auf das $(V, +)$ zugeordnete Ideal von $(T, [\cdot, \cdot])$ und $P_0 + P_1 = \mathbb{I}$. Wir definieren: $K_s(x, h) := (\exp(k_s(\exp^{-1}(x))), h)$ für alle $(x, h) \in M$; damit ist $K: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ analytisch und $K_s \circ K_t = K_{st}$, $K_1 = \text{id}_M$, somit K_s für $s \neq 0$ ein Diffeomorphismus. Für $s \neq 0$ haben wir:

$$K_s^{-1}(v'(K_s(x, h); K_s(x', h')))) = K_s^{-1}(v'(\exp(s \exp^{-1}(x)), h; \exp(s \exp^{-1}(x')), h')) = (\exp(s^{-1} \exp^{-1}(p_V(v'(\exp(s \exp^{-1}(x)), h; \exp(s \exp^{-1}(x')), h')))), p_H(v'(\exp(s \exp^{-1}(x)), h; \exp(s \exp^{-1}(x')), h')))),$$

wobei p_V und p_H die Projektoren auf V bzw. H sind. D^K ist offensichtlich für $s \neq 0$ analytisch und $p_H \circ D^K$ läßt sich für $s \rightarrow 0$ zu $v'(0, h; 0, h') = v_H(h, h') = v(0, h; 0, h')$ fortsetzen. $p_V \circ D^K$ hat an der Stelle $s = 0$ höchstens einen Pol erster Ordnung; nun hat aber

$\exp^{-1}(p_V(v'(\exp(s \exp^{-1}(x)), h; \exp(s \exp^{-1}(x')), h'))))$ an der Stelle $s = 0$ eine Nullstelle, so daß sich auch $p_V \circ D^K$ analytisch auf $s = 0$ fortsetzen läßt; da $D^K(s, \dots)$ für alle $s \neq 0$ eine Verknüpfung auf M ist, ist auch $v_0 := D^K(0, \dots)$ eine Verknüpfung auf M und K ist ein IW-Kontraktor von (M, v_0) auf (M, v') , so daß zu zeigen bleibt: $v = v_0$. Nun hat v_0 die Form $v_0(x, h; x', h') = (x - R_0(v_H(h, h'))x', v_H(h, h'))$, da nach 3.12 (M, v_0) eine Inhomogenisierung von (H, v_H) durch $(V, +)$ ist, und v hat nach Voraussetzung die Form $v(x, h; x', h') = (x - R(v_H(h, h')), v_H(h, h'))$; dabei sind R und R_0 Darstellungen von (H, v_H) auf V . Aus $k = \partial K$ folgt, daß die Lie-Algebren $(T, [\cdot, \cdot])$ und $(T, [\cdot, \cdot]_0)$ von (M, v) bzw. (M, v_0) gleich sind, damit auch die Erzeugenden von R und R_0 , somit auch R und R_0 , also auch $v = v_0$.

Ist M nicht zusammenhängend, so gibt es unter den Bedingungen (i)

und (ii) immer noch einen IW-Kontraktor von einer Inhomogenisierung von (H, v_H) durch $(V, +)$ auf (M, v') , wobei diese Inhomogenisierung auf der Einskomponente mit (M, v) übereinstimmt; über die anderen Komponenten können wir bei unserem Beweisverfahren jedoch nichts aussagen. Die Ursache ist, daß die Darstellung einer Lie-Gruppe von der Einskomponente ausgehend i.a. auf verschiedene Weise fortgesetzt werden kann - "diskrete Symmetrien". In der Praxis werfen solche diskreten Symmetrien aber in den meisten Fällen keine Probleme auf.

§4 Beispiele für die Kontraktion von Lie-Gruppen

Zur Veranschaulichung unserer Begriffe bringen wir einige Beispiele. Dazu greifen wir auf die Beispiele für die Kontraktion von Lie-Algebren aus 1§4 zurück. Dabei entspricht nicht jeder der dort angegebenen Kontraktionen eine Kontraktion der Lie-Gruppe.

Für die Topologie von $\overline{O(p, q)}_0$ gilt: $M' \sim \mathbb{R}^{pq} \times \overline{SO(p)} \times \overline{SO(q)}$, für die von $\overline{IO(p, q-1)}_0$: $M \sim \mathbb{R}^{pq+q-1} \times \overline{SO(p)} \times \overline{SO(q-1)}$, wo $\overline{G}$ und $\overline{G'}$ Überlagerungsräume, bzw. "Unterlagerungsräume", von G sein sollen. Aus $M \sim M'$ folgt dann: $\mathbb{R}^{q-1} \times \overline{SO(p)} \times \overline{SO(q-1)} \sim \overline{SO(p)} \times \overline{SO(q)}$. Für $p, q \geq 3$ ist aber die rechte Seite immer kompakt, die linke nicht-kompakt, so daß es für $p, q \geq 3$ keine Deformation von einer zur $IO(p, q-1)_0$ lokal-isomorphen zu einer zur $O(p, q)_0$ lokal-isomorphen Lie-Gruppe geben kann. Es bleiben also nur die Fälle mit $q = 1$ und mit $q = 2$ zu betrachten; das gilt auch für die Inhomogenisierungen 1§4.2, 1§4.3 und für die Erweiterung 1§4.4. Zu der Deformation 1§4.5 iv kann es für $p, q \geq 2$ keine entsprechende Deformation von Lie-Gruppen geben.

4.1 Kontraktion der $O(n, 1)_0$ zur $IO(n)_0$

Die Verknüpfungen der $O(n, 1)_0$ und der $IO(n)_0$ lassen sich auf $\mathbb{R}^n \times SO(n)$ definieren:

$$i) \quad IO(n)_0 : m(x, D; x', D') := (x + Dx', DD') \quad \text{und}$$

$$ii) \quad O(n, 1)_0 : m'(x, D; x', D') := \left(\left(\sqrt{1+x'^2} + \frac{x \cdot Dx'}{1+\sqrt{1+x^2}} \right) x + Dx', D(x, Dx') DD' \right)$$

mit

$$iii) \quad D(x, y) := \left(\Pi + \frac{x \otimes x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right) \left(\Pi + \frac{y \otimes y}{1+\sqrt{1+y^2}} \right) + x \otimes y -$$

$$- \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+x \cdot y} \left[\left(\sqrt{1+y^2} + \frac{x \cdot y}{1+\sqrt{1+x^2}} \right) x + y \right] \otimes \left[x + \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x \cdot y}{1+\sqrt{1+y^2}} \right) y \right].$$

Dann ist $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \text{SO}(n) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \text{SO}(n)$,

$$\text{iv) } K(s; x, D) := (sx, D),$$

ein IW-Kontraktor von $\text{IO}(n)_0$ auf $\text{O}(n, 1)_0$.

4.2 Kontraktion der $\overline{\text{O}(n, 2)}_0$ zur $\text{IO}(n, 1)_0$

Die Mannigfaltigkeit von $\text{O}(n, 2)_0$ ist analytisch diffeomorph zu $S_1 \times \mathbb{R}^n \times \text{O}(n, 1)_0$, $S_1 := 1$ -Sphäre, die von $\text{IO}(n, 1)_0$ zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \text{O}(n, 1)_0$.

Die Abbildung $T: \text{IO}(n, 1)_0 \rightarrow \text{O}(n, 2)_0$,

$$\text{i) } T(x_0, x, L) := \begin{bmatrix} \Pi_n & 0 & 0 \\ 0 & \cos x_0 & -\sin x_0 \\ 0 & \sin x_0 & \cos x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_n + \frac{x \otimes x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & \sqrt{1 + x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ist eine Überlagerungsabbildung, und es gibt auf der Mannigfaltigkeit $\text{IO}(n, 1)_0$ genau eine Verknüpfung mit Einselement $(0, 0, \Pi_{n+1})$, die T zu einem Überlagerungshomomorphismus macht [15; p. 143]; die so definierte Lie-Gruppe nennen wir $\overline{\text{O}(n, 2)}_0$ (für $n = 3$ vgl. 5§2). Die Menge $\{(0, 0, L) \mid L \in \text{O}(n, 1)_0\}$ ist eine gemeinsame Untergruppe von $\text{IO}(n, 1)_0$ und von $\overline{\text{O}(n, 2)}_0$, die Menge $\{(x_0, x, \Pi_{n+1}) \mid (x_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\}$ ist ein abelscher Normalteiler von $\text{IO}(n, 1)_0$. Der IW-Kontraktor k von $\text{io}(n, 1)$ auf $\text{o}(n, 2)$ aus 1.4.1iii ist derart, daß $k_0(\text{io}(n, 1))$ die $\{(0, 0, L) \mid L \in \text{O}(n, 1)_0\}$ entsprechende Unterálgebra und $k_0^{-1}(0)$ das $\{(x_0, x, \Pi_{n+1}) \mid (x_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\}$ entsprechende Ideal von $\text{io}(n, 1)$; nach 3.13 gibt es also einen IW-Kontraktor von $\text{IO}(n, 1)_0$ auf $\overline{\text{O}(n, 2)}_0$.

4.3 Kontraktion der $\text{IO}(n, 1)_0$ zur $\text{IIO}(n)_G$

Mit $\text{IIO}(n)_G$ bezeichnen wir die auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \text{SO}(n)$ durch

i) $\text{IIO}(n)_G: m(x_0, x, y, D; x'_0, x', y', D') := (x_0 + x'_0, x + Dx' + x'_0 y, y + Dy', DD')$ definierte Inhomogenisierung der $\text{IO}(n)_0$; das ist eine Verallgemeinerung der Galileigruppe auf die räumliche Dimension n . $\text{IO}(n, 1)_0$ ist auf der selben Mannigfaltigkeit gegeben durch

ii) $\text{IO}(n, 1)_0: m'(x_0, x, y, D; x'_0, x', y', D') :=$

$$= (x_0 + \sqrt{1 + y^2} x'_0 + y \cdot Dx', x + Dx' + (x'_0 + \frac{y \cdot Dx'}{1 + \sqrt{1 + y^2}}) y, \dots),$$

wo die Pünktchen $m'(y, D; y', D')$ aus 4.1ii bedeuten; $\text{IO}(n, 1)_0$ ist eine Inhomogenisierung von $\text{O}(n, 1)_0$ und eine Verallgemeinerung der Poincarégruppe auf die räumliche Dimension n . $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \text{IO}(n)_0 \rightarrow$

$$\mathbb{R}^{n+1} \times \text{IO}(n)_0,$$

$$\text{iii) } K(s; x_0, x, y, D) := (x_0, sx, sy, D),$$

ist dann ein IW-Kontraktor von $\text{IIO}(n)_G$ auf $\text{IO}(n, 1)_0$.

4.4 Kontraktion der $\text{IO}(n, 1)_0$ zur $\text{IIO}(n)_G$

Mit $\text{IIO}(n)_G$ bezeichnen wir die auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \text{SO}(n)$ durch

$$\text{i) } \text{IIO}(n)_G: m(x_0, x, y, D; x'_0, x', y', D') := (x_0 + x'_0 + y \cdot Dx', x + Dx', y + Dy', DD')$$

definierte Inhomogenisierung der $\text{IO}(n)_0$; das ist eine Verallgemeinerung der Carrollgruppe [8], [9] auf räumliche Dimension n . Mit $\text{IO}(n, 1)_0$ aus 4.3 ii ist $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \text{IO}(n)_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \text{IO}(n)_0$,

$$\text{iii) } K(s; x_0, x, y, D) := (sx_0, x, sy, D),$$

ein IW-Kontraktor von $\text{IIO}(n)_G$ auf $\text{IO}(n, 1)_0$.

4.5 Kontraktion der $\text{ZIO}(n, 1)_0$ zur $\text{ZIIIO}(n)_G$

Mit $\text{ZIIIO}(n)_G$ meinen wir eine zentrale Erweiterung von $\text{IIO}(n)_G$ durch $\mathbb{R}$, die durch

$$\begin{aligned} \text{i) } \text{ZIIIO}(n)_G: m(r, x_0, x, y, D; r', x'_0, x', y', D') := \\ = (r + r' + y \cdot Dx' + \frac{1}{2} x'_0 y^2, x_0 + x'_0, x + Dx' + x'_0 y, y + Dy', DD') \end{aligned}$$

definiert ist; $\text{ZIO}(n, 1)_0$ ist die folgende zentrale Erweiterung von $\text{IO}(n, 1)_0$ durch $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{ii) } \text{ZIO}(n, 1)_0: m'(r, x_0, x, y, D; r', x'_0, x', y', D') := \\ = (r + r' + (\sqrt{1 + y^2} - 1) x'_0 + y \cdot Dx', \dots), \end{aligned}$$

wo die Pünktchen 4.3 ii bedeuten. Dann ist $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+2} \times \text{IO}(n)_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2} \times \text{IO}(n)_0$,

$$\text{iii) } K(s; r, x_0, x, y, D) := (s^2 r, x_0, sx, sy, D),$$

ein einfacher Kontraktor von Grad 2 von $\text{ZIIIO}(n)_G$ auf $\text{ZIO}(n, 1)_0$. $\text{ZIIIO}(n)_G$ ist eine Verallgemeinerung der quantenmechanischen Galileigruppe; der Kern von K_0 ist die Heisenberggruppe der Dimension $2n+1$. Interessanterweise enthält die $\text{ZIIIO}(n)_G$ eine zur $\text{IIO}(n)_G$ isomorphe abgeschlossene Untergruppe:

$$\text{iv) } (x_0, x, y, D) \longmapsto (x_0, 0, x, y, D)$$

definiert einen injektiven analytischen Homomorphismus von $\text{IIO}(n)_G$ in $\text{ZIIIO}(n)_G$.

Die Kontraktion der $\text{IO}(n, 2)$ und $\text{ZIO}(n, 2)$ interessiert uns hier

nicht weiter.

Kapitel 3: Deformation und Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen

§1 Deformation von Lie-Transformationsgruppen

Unter einer Lie-Transformationsgruppe verstehen wir ein Tripel (G, M, w) von einer Lie-Gruppe G , einer analytischen Mannigfaltigkeit M und einer analytischen Abbildung $w: G \times M \rightarrow M$ mit

$$1.1 \quad w(g, w(g', x)) = w(gg', x) \quad , \quad w(e, x) = x \quad \text{für alle } g, g' \in G \text{ und } x \in M;$$

w heißt Wirkung von G auf M , $w(g, \cdot)$ heißt Wirkung von g auf M , $w(g, x)$ heißt Wirkung von g auf x .

1.2 Definition: Sei I ein offenes Intervall um 0 ; dann ist eine Deformation einer Lie-Transformationsgruppe (G, M, w) ein Paar (D, W) von analytischen Abbildungen $D: I \times G \times G \rightarrow G$ und $W: I \times G \times M \rightarrow M$ derart, daß D eine Deformation von G und $W(s, \cdot, \cdot)$ für alle s aus I eine Wirkung der Lie-Gruppe $(G, D(s, \cdot, \cdot))$ auf M ist mit $W(0, \cdot, \cdot) = w$. W heißt Deformation der Wirkung w .

Eine Mannigfaltigkeit wird durch die Wirkung w einer Gruppe G in Bahnen $w(G, x)$ zerlegt; auf jeder Bahn wirkt G transitiv, d.h. $w(\cdot, x)$ ist auf $w(G, x)$ surjektiv. Jede transitive Lie-Transformationsgruppe (G, M, w) ist äquivalent zu einer Lie-Transformationsgruppe $(G, G/G_x, n)$ mit $n(g, g'G_x) := gg'G_x$, $G_x := \{g \in G \mid w(g, x) = x\}$, für ein beliebiges x aus M , d.h. es gibt einen analytischen Diffeomorphismus $t_x: M \rightarrow G/G_x$ mit $w(g, y) = t_x^{-1}(gt_x(y))$. Unter bestimmten Bedingungen erzeugt nun eine Deformation einer Lie-Gruppe eine natürliche Deformation der Lie-Transformationsgruppen $(G, G/H, n)$.

1.3 Satz: Sei $D: I \times G \times G \rightarrow G$ eine Deformation der Lie-Gruppe G und H eine abgeschlossene Untergruppe von G ; weiter gebe es eine analytische Abbildung $J: I \times G \rightarrow G$ derart, daß $J(s, \cdot)$ für alle s aus I ein Diffeomorphismus ist mit

$$i) \quad D(s, J(s, g), J(s, h)) = J(s, gh) \quad \text{für alle } s \in I \text{ und alle } g \in G,$$

$$ii) \quad J(0, gh) = gJ(0, h) \quad \text{für alle } g \text{ aus } G.$$

Dann ist $J(s, H)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $(G, D(s, \cdot, \cdot))$ und $H \subseteq J(0, H)$; weiter gibt es eine Deformation W der natürlichen Wirkung w von G auf G/H derart, daß (D, W) eine Deforma-

tion der Lie-Transformationsgruppe $(G, G/H, w)$ ist.

Beweis: H abgeschlossen, $J_s := J(s, \cdot)$ Diffeomorphismus $\Rightarrow J_s(H)$ ist abgeschlossen. Aus (i) folgt: $D(s, J_s(h), J_s(h')) \in J_s(H)$ für alle $h, h' \in H \Rightarrow J_s(H)$ ist Untergruppe von (G, ∇_s) , $\nabla_s := D(s, \dots)$, und aus (ii): $hJ_0(H) = J_0(hH) \Rightarrow h \in J_0(H)$ für $h \in H$. Weiter sei $\hat{J}_s: G/H \rightarrow (G, \nabla_s)/J_s(H)$, $\hat{J}_s(gH) := \nabla_s(J_s(g), J_s(H))$; wegen (i) ist $\hat{J}_s$ dann wohldefiniert und bijektiv. Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{J_s} & G \\ \downarrow n & \hat{J}_s & \downarrow n_s \\ G/H & \xrightarrow{\quad} & (G, \nabla_s)/J_s(H) \end{array}$$

wobei n und n_s die natürlichen Abbildungen und somit offen und analytisch sind. Dann ergibt sich mit (i): $\hat{J}_s \circ n = n_s \circ J_s$; nach [11; p. 113]

gibt es eine Karte $(n \circ \exp|_{L-h})^{-1}$ von einer Umgebung von $H \in G/H$ in $L-h$, wo h die H entsprechende Unter algebra der Lie-Algebra L von G ist. Damit folgt, daß $\hat{J}_s$ für alle s aus I ein analytischer Diffeomorphismus ist. Hiermit definieren wir $W_s: G \times G/H \rightarrow G/H$,

$$\text{iii) } W_s(g, x) := \hat{J}_s^{-1}(w_s(g, \hat{J}_s(x))),$$

wobei w_s die natürliche Wirkung von (G, ∇_s) auf $(G, \nabla_s)/J_s(H)$ ist. W_s ist für alle s aus I eine Wirkung von (G, ∇_s) auf G/H , und es bleibt zu zeigen, daß $W: I \times G \times G/H \rightarrow G/H$, $W(s, g, x) := W_s(g, x)$, analytisch ist und $W_0 = w$. Die Analytizität von W folgt ähnlich der von $\hat{J}_s$: Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} I \times G \times G & \xrightarrow{T_1} & I \times G \times G & \xrightarrow{M} & I \times G & \xrightarrow{T_2} & G \\ \downarrow \text{id}_{I \times G} \times n & & & & & & \downarrow n \\ I \times G \times G/H & \xrightarrow{\quad W \quad} & & & & & G/H \end{array}$$

Dabei ist $T_1(s, g, g') := (s, g, J_s(g'))$, $T_2(s, g) := J_s^{-1}(g)$ und $M(s, g, g') := (s, m_s(g, g'))$, $m_s := m_{\nabla_s}$ gemäß 2.1.2. Die Analytizität von T_1 und M ist unmittelbar einsichtig, die von T_2 folgt aus dem Satz über implizite Funktionen. Weiter gilt: $n \circ T_2 \circ M \circ T_1(s, g, g') = n \circ J_s^{-1} \circ m_s(g, J_s(g')) = \hat{J}_s^{-1} \circ n_s \circ m_s(g, J_s(g')) = \hat{J}_s^{-1} \circ w_s(g, n_s \circ J_s(g')) = \hat{J}_s^{-1} \circ w_s(g, \hat{J}_s \circ n(g')) = W_s(g, n(g'))$, d.h. $n \circ T_2 \circ M \circ T_1 = W \circ (\text{id}_{I \times G} \times n)$; damit folgt: W ist analytisch. Schließlich folgt aus (i) und (ii): $J_0(g)J_0(H) = J_0(gH)$, und damit $\hat{J}_0 \circ W(0, g, n(g')) = w(g, n_0 \circ J_0(g')) = J_0(gg')J_0(H) = n_0(J_0(gg')) = \hat{J}_0(n(gg')) = \hat{J}_0(w(g, n(g')))$.

§2 Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen

Ist G eine Lie-Gruppe, (G', M', w') eine Lie-Transformationsgruppe und $K: I \times G \rightarrow G'$ ein Kontraktor von G auf G' , so kann man die zu der Deformation D^K gehörigen Deformationen W einer Wirkung von G auf M' für $s \neq 0$ in der Form $W(s, g, x) = W'(s, K_s(g), x)$ schreiben, wo $W'(s, \cdot)$ Wirkungen von G' auf M' sind, d.h. man kann im Fall einer Kontraktion die Untersuchung des Problems, bei dem Scharen von Gruppen zusammen mit Scharen von Wirkungen dieser Gruppen auftreten, zurückführen auf ein Problem, in dem eine Gruppe mit einer Schar von Wirkungen auftritt. Wie soll man nun die Kontraktion einer Wirkung, als Spezialisierung einer Deformation, definieren? Man könnte versuchen, einfach $W'(s, \cdot) = w'$ für alle s aus I zu fordern. Man erhält so zwar eine Deformation einer Wirkung w von G , aber der Kern des Homomorphismus K_0 (siehe 2.2.3) würde immer in id_M abgebildet; weiter würde die natürliche Deformation einer Lie-Transformationsgruppe gemäß 1.3 auch dann keine Kontraktion der Lie-Transformationsgruppe sein, wenn die Deformation eine Kontraktion ist. Dazu muß man vielmehr eine Schar von Äquivalenztransformationen der Wirkung w' zulassen. Wir definieren:

2.1 Definition: Ein Kontraktor von einer Lie-Transformationsgruppe (G, M, w) auf eine Lie-Transformationsgruppe (G', M', w') ist ein Paar (K, J) von analytischen Abbildungen $K: I \times G \rightarrow G'$ und $J: I \times M \rightarrow M'$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) K ist ein Kontraktor von G auf G' ;
- ii) $J_s := J(s, \cdot)$ ist für $s \neq 0$ ein Diffeomorphismus von M auf M' ;
- iii) $W^{(K, J)}: I \times G \times M \rightarrow M$, $W^{(K, J)}(s, g, x) := J_s^{-1}(w'(K(s, g), J_s(x)))$ für $s \neq 0$ und $W^{(K, J)}(s, \cdot, \cdot) := w$, ist eine Deformation der Wirkung w .

Die Deformation $(J_s^{(K, J)}, W^{(K, J)})$ von (G, M, w) heißt Kontraktion von (G', M', w') und $W^{(K, J)}$ Kontraktion der Wirkung w' .

Das Analogon zu 1.3 ist der folgende Satz.

2.2 Satz: Sei $K: I \times G \rightarrow G'$ ein Kontraktor von G auf G' und H eine abgeschlossene Untergruppe von G derart, daß

- i) $K_s(H) = K_t(H) =: H'$ für alle $s, t \neq 0$;
- ii) $v'(K_s(g), K_s(H)) = K_s(gH)$ für alle g aus G und alle s aus I .

Dann ist H' eine abgeschlossene Untergruppe von G' und es gibt einen Kontraktor (K, J) von der Lie-Transformationsgruppe $(G, G/H, w)$ auf die Lie-Transformationsgruppe $(G', G'/H', w')$.

Beweis: Aus (ii) folgt: $v'(K_s(h), K_s(h')) \in K_s(H)$ für alle h, h' aus H
 $\Rightarrow K_s(H) = H'$ ist Untergruppe von G' ; für $s \neq 0$ ist K_s ein Diffeomorphismus $\Rightarrow K_s(H) = H'$ ist abgeschlossen. Sei $J: I \times G/H \rightarrow G'/H'$,
 $J_s(gH) := v'(K_s(g), H')$. Dann ist J analytisch, denn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} I \times G & \xrightarrow{K} & G' \\ \downarrow \text{id} \times n & & \downarrow n' \\ I \times G/H & \xrightarrow{J} & G'/H' \end{array}$$

ist kommutativ und n sowie n' sind offen und analytisch; darüber hinaus ist J_s für $s \neq 0$ ein Diffeomorphismus. Damit erhalten wir für die wie in 2.1iii erklärte Abbildung $w^{(K, J)}$: Wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} I \times G \times G & \xrightarrow{M} & G \\ \downarrow \text{id}_{I \times G} \times n & & \downarrow n \\ I \times G \times G/H & \xrightarrow{w^{(K, J)}} & G/H \end{array}$$

wobei $M(s, \dots)$ die $D^K(s, \dots)$ gemäß 2.1.2 entsprechende Multiplikation ist, und weil n und n' offen und analytisch sind, ist $w^{(K, J)}$ analytisch. ■

Man beachte, daß unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 $K|_{I \times H} \rightarrow H'$ ein Kontraktor von der Lie-Gruppe H auf die Lie-Gruppe H' ist.

§3 Einfache Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen

Analog zu der Begriffsbildung für die einfache Kontraktion einer Lie-Gruppe definieren wir für Lie-Transformationsgruppen:

3.1 Definition: Ein einfacher Kontraktor von einer Lie-Transformationsgruppe (G, M, w) auf eine Lie-Transformationsgruppe (G', M, w') ist ein Kontraktor (K, J) derart, daß K ein einfacher Kontraktor von G auf G' ist und $J_s \circ J_t = J_{st}$ für alle s, t aus dem Intervall I der Kontraktion mit st in I . Die Deformation $w^{(K, J)}$ von w heißt dann einfache Kontraktion der Wirkung w' .

Insbesondere müssen also G und G' auf derselben Mannigfaltigkeit definiert sein. Das Intervall der Kontraktion spielt bei einfachen Kontraktoren keine Rolle, da die Kontraktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortge-

führt werden kann:

3.2 Lemma: Sei (K, J) ein einfacher Kontraktor; dann gibt es genau einen einfachen Kontraktor $(\hat{K}, \hat{J}) = (K \uparrow \mathbb{R}, J \uparrow \mathbb{R})$.

Beweis: Nach 2.3.2 gibt es genau einen einfachen Kontraktor $\hat{K} = K \uparrow \mathbb{R}$; für jedes $s \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n \in I$ und $s/n \in I$ für ein vorgegebenes offenes Intervall I um 0, und wir definieren: $\hat{J}_s := J_{s/n} \circ J_{1/n}^{-1}$. Der restliche Beweis verläuft analog zu 1.3.2.

Für einfache Kontraktoren von Lie-Transformationsgruppen gilt zusätzlich zu 2.3.4 ein Satz über die Struktur der Mannigfaltigkeit und die Wirkung der Gruppe auf die Mannigfaltigkeit:

3.3 Satz: Sei (K, J) ein einfacher Kontraktor von der Lie-Transformationsgruppe (G, M, w) auf die Lie-Transformationsgruppe (G', M, w') ; dann ist $K_0(G)$ eine gemeinsame abgeschlossene Untergruppe von G und G' , $K_0^{-1}(e)$ ein abgeschlossener einfach zusammenhängender nilpotenter Normalteiler von G und $G = K_0^{-1}(e) \otimes K_0(G)$. Für die Wirkungen w und w' gilt mit $K_s := K(s, \cdot)$ und $J_s := J(s, \cdot)$

i) $w'(K_0(g), J_0(x)) = w(K_0(g), J_0(x))$ und

$J_s(w(g, x)) = w(K_s(g), J_s(x))$ für alle $g \in G$ und alle $x \in M$.

Hieraus ergeben sich für die Mannigfaltigkeit M die folgenden Eigenschaften:

ii) $J_0(M)$ ist abgeschlossen und mit der Relativtopologie eine Untermannigfaltigkeit; auf $J_0(M)$ stimmen für alle g aus $K_0(G)$ die Wirkungen $w'(g, \cdot)$ und $w(g, \cdot)$ überein und $J_0(M)$ ist unter diesen Wirkungen invariant. $(K_0(G), J_0(M), w|_{K_0(G) \times J_0(M)})$ ist eine Lie-Transformationsgruppe und $(M, J_0(M), J_0)$ ist ein analytischer Faserraum.

iii) Jede Faser $J_0^{-1}(x)$, $x \in J_0(M)$, ist abgeschlossen, einfach wegzusammenhängend und mit der Relativtopologie eine Untermannigfaltigkeit. Die Wirkung $w(g, \cdot)|_{J_0^{-1}(x)}$ ist für alle g aus G ein Diffeomorphismus von der Faser $J_0^{-1}(x)$ auf die Faser $J_0^{-1}(w(g, x))$; insbesondere sind die Fasern unter der Wirkung $w(g, \cdot)$ für g aus $K_0^{-1}(e)$ invariant und $(K_0^{-1}(e), J_0^{-1}(x), w|_{K_0^{-1}(e) \times J_0^{-1}(x)})$ ist für jedes x aus $J_0(M)$ eine Lie-Transformationsgruppe.

iv) (G, M, w) ist genau dann transitiv, wenn $(K_0(G), J_0(M), w|_{K_0(G) \times J_0(M)})$ und $(K_0^{-1}(e), J_0^{-1}(x), w|_{K_0^{-1}(e) \times J_0^{-1}(x)})$ für ein x aus $J_0(M)$ transitiv sind; dann ist $(K_0^{-1}(e), J_0^{-1}(y), w|_{K_0^{-1}(e) \times J_0^{-1}(y)})$ für jedes y aus $J_0(M)$ transitiv und $(M, J_0(M), J_0)$ ist ein analytisches Faserbündel mit typischer Faser $K_0^{-1}(e)/N$, wobei N eine abgeschlossene Untergruppe mit $K_s(N) \subseteq N$ für alle s aus $\mathbb{R}$ ist.

Beweis: i) $J_s(W^{(K, J)}(s, g, x)) = w'(K_s(g), J_s(x))$ nimmt wegen der Analytizität von $J, K, W^{(K, J)}$ und w' für $s \rightarrow 0$ die Grenzwerte $J_0(w(g, x)) = w'(K_0(g), J_0(x))$ an. Für $s \neq 0$ gilt: $J_s(w(g, x)) = J_s(\lim_{t \rightarrow 0} J_t^{-1}(w'(K_t(g), J_t(x)))) = \lim_{t \rightarrow 0} J_{t/s}^{-1}(w'(K_{t/s}(K_s(g)), J_{t/s}(J_s(x)))) = w(K_s(g), J_s(x))$, woraus sich die Gleichungen (i) ergeben.

ii) Nach 3.4 ist $J_0(M)$ mit der Relativtopologie eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und $J_0: M \rightarrow J_0(M)$ für x aus $J_0(M)$ eine Submersion, denn J_0 ist analytisch und $J_0 = J_0^2$. $J_0 \circ J_s = J_0 \Rightarrow dJ_0(x) = dJ_0(J_s(x))dJ_s(x) \Rightarrow \text{Rang } dJ_0(x) = \text{Rang } dJ_0(J_s(x))$ für $s \neq 0$;

es gibt eine Umgebung von $J_0(x)$ mit $\text{Rang } dJ_0(y) = \dim J_0(M)$, $J_s(x) \rightarrow J_0(x)$ für $s \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Rang } dJ_0(J_s(x)) = \dim J_0(M)$ für hinreichend kleine s , also $\text{Rang } dJ_0(x) = \dim J_0(M)$ für alle x aus M , d.h. J_0 ist eine Submersion auf $J_0(M)$, mithin ist $(M, J_0(M), J_0)$ ein Faserraum. Die Eigenschaften von w und w' auf $J_0(M)$ sind triviale Folgen von (i).

iii) Nach [46; p.44] ist $J_0^{-1}(x)$ für alle x aus $J_0(M)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit der Relativtopologie von M . Aus $J_s \circ J_t = J_{st}$ folgt analog zu 2.3.4 iv, daß $J_0^{-1}(x)$ für alle x aus $J_0(M)$ einfach zusammenhängend ist. Die Eigenschaften von w auf $J_0^{-1}(x)$ sind eine triviale Folge von (i).

iv) Sei (G, M, w) transitiv, $x \in J_0(M)$; dann läßt $K_0(G)$ nach (ii) $J_0(M)$ invariant, so daß $(K_0^{-1}(e), J_0^{-1}(x), w|_{K_0^{-1}(e) \times J_0^{-1}(x)})$ transitiv sein muß. Andererseits läßt $K_0^{-1}(e)$ die Faser $J_0^{-1}(x)$ invariant, so daß auch $(K_0(G), J_0(M), w|_{K_0(G) \times J_0(M)})$ transitiv sein muß. Seien nun umgekehrt die Gruppen $(K_0^{-1}(e), J_0^{-1}(x), w|_{K_0^{-1}(e) \times J_0^{-1}(x)})$ und $(K_0(G), J_0(M), w|_{K_0(G) \times J_0(M)})$ transitiv und $y \in M$; dann gibt es ein $h \in K_0(G)$ mit $w(h, J_0(y)) = x$ und damit wegen (i) $w(h, y) \in J_0^{-1}(x)$. Also gibt

es ein $n \in K_0^{-1}(e)$ mit $w(n, x) = w(h, y) \Rightarrow y = w(h^{-1}n, x)$, d.h. (G, M, w) ist transitiv.

Sei $H := \{h \in K_0(G) \mid w(h, x) = x\}$, $N := \{n \in K_0^{-1}(e) \mid w(n, x) = x\}$. Dann sind H und N abgeschlossene Untergruppen [11; p.114] und $t_H: K_0(G)/H \rightarrow J_0(L)$, $t_H(hH) := w(h, x)$, und $t_N: K_0^{-1}(e)/N \rightarrow J_0^{-1}(x)$, $t_N(nN) := w(n, x)$, analytische Diffeomorphismen [46; p.65]; $n \in N \Rightarrow w(n, x) = x \Rightarrow w(K_S(n), x) = x \Rightarrow K_S(n) \in N$, $h \in H \Rightarrow w(hnh^{-1}, x) = w(hn, x) = w(h, x) = x \Rightarrow hnh^{-1} \in N$, somit ist $K_S(N) \subseteq N$ und $hNh^{-1} = N$ für alle s aus $\mathbb{R}$ und h aus H . Nach [11; p.113] gibt es eine offene Umgebung $U' \subseteq K_0(G)/H$ von H und eine analytische Abbildung $q: U' \rightarrow K_0(G)$ mit $p \circ q = \text{id}_{U'}$, $p(h) := hH$. Sei $U := t_H^{-1}(U')$; wir definieren: $t: K_0^{-1}(e)/N \times U \rightarrow J_0^{-1}(U)$, $t(nN, y) := w(q \circ t_H^{-1}(y), t(nN))$; dann ist $t': J_0^{-1}(U) \rightarrow K_0^{-1}(e)/N \times U$, $t'(y) := (t_N^{-1}(w((q \circ t_H^{-1}(y))^{-1}, y), J_0(y)))$, die Umkehrabbildung von t , t und t' sind analytisch. Also ist t ein analytischer Diffeomorphismus und somit $(M, J_0(M), J_0)$ ein analytisches Faserbündel mit typischer Faser $K_0^{-1}(e)/N$.

Der Quotientenraum $K_0^{-1}(e)/N$ läßt sich wegen $K_S(N) \subseteq N$ immer mit einer linearen Struktur versehen; gilt $hnh^{-1} = n$ für alle (n, h) aus $N \times H$, so ist $(M, J_0(M), J_0)$ ein Vektorbündel. Das Faserbündel $(M, J_0(M), J_0)$ ist i.a. nicht trivial. Eine hinreichende Bedingung hierfür ist $hNh^{-1} = N$ für alle $h \in H$; dann ist M diffeomorph zu $K_0^{-1}(e)/N \times K_0(G)/H$. Eine weitere hinreichende Bedingung dafür, daß $(M, J_0(M), J_0)$ trivial ist, ist die Existenz eines analytischen Querschnitts von $K_0(G)/H$ in $K_0(G)$; dann ist $(M, J_0(M), J_0)$ ein triviales Vektorbündel.

Das folgende Lemma, das wir im Beweis von 3.3 ii benutzt haben, sollte Bestandteil jedes Lehrbuchs über Differentialgeometrie sein, da dies nicht der Fall ist, führen wir es auf eine ähnliche Aussage in [16] zurück.

3.4 Lemma: Sei M eine analytische Mannigfaltigkeit und $J: M \rightarrow M$ eine analytische Abbildung mit $J^2 = J$; dann ist $J(M)$ abgeschlossen und mit der Relativtopologie eine Untermannigfaltigkeit. $J: M \rightarrow J(M)$ ist für alle x aus $J(M)$ eine Submersion.

Beweis: Da J analytisch ist und $J^2 = J$, ist $J(M)$ abgeschlossen, und $J \circ J|_{J(M)} = \text{id}_{J(M)}$, so daß $J|_{J(M)}$ eine analytische Retraktion von M ist. Analog zu der Aussage über Retraktionen in [16; p.104] ist $J(M)$ darum in der Relativtopologie eine Untermannigfaltigkeit. Weiter gilt: $dJ(x)^2 = dJ(x)$ für x aus $J(M)$, woraus folgt, daß es eine Umgebung von x in M gibt derart, daß dJ in dieser Umgebung

§4 Beispiele für die Kontraktion von Lie-Transformationsgruppen

Wir kontrahieren im folgenden einige der in 2§4 eingeführten Gruppen als Lie-Transformationsgruppen. Das ist bei $O(n,1)_O$, $IO(n)_O$, $IO(n,1)_O$, $IIO(n)_G$ und $IIO(n)_G$ nicht weiter schwierig, denn diese Gruppen werden meistens als Lie-Transformationsgruppen definiert; bei $ZIO(n,1)_O$ und $ZIIO(n)_G$ bietet sich sofort eine Interpretation als Lie-Transformationsgruppe an. $\overline{O(3,2)}_O$ wird in 5§2 näher besprochen.

4.1 Kontraktion der $O(n,1)_O$ zur $IO(n)_O$

Die Multiplikation von $O(n,1)_O$ und $IO(n)_O$ ist in 2§4.1 definiert, ebenso ein Kontraktor von $IO(n)_O$ auf $O(n,1)_O$. $IO(n)_O$ wirke in folgender Weise auf dem $\mathbb{R}^n$:

$$i) IO(n)_O: w(a, D; x) := a + Dx.$$

$O(n,1)_O$ wird üblicherweise als Transformationsgruppe des $\mathbb{R}^{n+1}$ aufgefaßt; wir fassen $O(n,1)_O$ aus 2§4.1 ii) aber als Lie-Transformationsgruppe des $\mathbb{R}^n$ auf mit der Wirkung w' :

$$ii) O(n,1)_O: w'(a, D; x) := \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{a \cdot Dx}{1+\sqrt{1+a^2}} \right) a + Dx ;$$

w' ist der natürlichen Wirkung von $O(n,1)_O$ auf $O(n,1)_O/H$, $H := \{(0, D) \mid D \in O(n)_O\}$, äquivalent.

Dann ist (K, J) mit K wie in 2§4.1 iv) und $J: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$iii) J(s, x) := sx,$$

ein einfacher Kontraktor der Lie-Transformationsgruppen. Die Verhältnisse sind dabei gerade die in 2.2 vorausgesetzten.

4.2 Kontraktion der $IO(n,1)_O$ zur $IIO(n)_G$

Die $IIO(n)_G$ ist als Lie-Transformationsgruppe des $\mathbb{R}^{n+1}$ erklärt durch

$$i) IIO(n)_G: w(a_O, a, v, D; x_O, x) := (a_O + x_O, a + Dx + x_O v),$$

$IO(n,1)_O$ durch

$$ii) IO(n,1)_O: w'(a_O, a, v, D) :=$$

$$= (a_O + \sqrt{1+v^2} x_O + v \cdot Dx, a + Dx + (x_O + \frac{v \cdot Dx}{1+\sqrt{1+v^2}}) v) .$$

Dann ist (K, J) mit K wie in 2§4.3 iii) und $J: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\text{iii)} \quad J(s; x_0, x) := (x_0, sx),$$

ein einfacher Kontraktor der Lie-Transformationsgruppen, wobei die Verhältnisse die von 2.2 sind.

4.3 Kontraktion der $\text{IO}(n, 1)_0$ zur $\text{IIO}(n)_G$

Die Wirkung von $\text{IIO}(n)_G$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir als

$$\text{i)} \quad \text{IIO}(n)_G: w(a_0, a, v, D; x_0, x) := (a_0 + x_0 + v \cdot Dx, a + Dx);$$

dann ist (K, J) mit K wie in 2.4.4iii und $J: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\text{iii)} \quad J(s; x_0, x) := (s x_0, x),$$

ein einfacher Kontraktor der Lie-Transformationsgruppen, und wieder liegen die Verhältnisse von 2.2 vor.

4.4 Kontraktion der $\text{ZIO}(n, 1)_0$ zur $\text{ZIIO}(n)_G$

$\text{ZIIO}(n)_G$ und $\text{ZIO}(n, 1)_0$ definieren wir jetzt als Lie-Transformationsgruppen des $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\text{i)} \quad \text{ZIIO}(n)_G: w(r, a_0, a, v, D; x_0, x) := w(a_0, a, v, D; x_0, x) \quad \text{und}$$

$$\text{ii)} \quad \text{ZIO}(n, 1)_0: w'(r, a_0, a, v, D; x_0, x) := w'(a_0, a, v, D; x_0, x)$$

mit w und w' wie in 4.2; dann ist (K, J) mit K wie in 2.4.5iii und J wie in 4.2iii ein einfacher Kontraktor der Lie-Transformationsgruppen, und wiederum liegen die Verhältnisse von 2.2 vor.

Kapitel 4: Deformation und Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen

Von den in der Physik benutzten Sorten von Gruppendarstellungen wollen wir nur drei untersuchen, die in Zusammenhang mit der Automorphismengruppe der Algebra der Observablen auftreten. Als Algebra der Observablen sehen wir dabei die Algebra $C^*(H)$ der beschränkten Operatoren auf einem separablen Hilbertraum H an, als Observable die beschränkten selbstadjungierten Operatoren. Als Automorphismus dieser Algebra betrachten wir eine reell-lineare Bijektion $t: C^*(H) \rightarrow C^*(H)$ mit $t(XY) = t(X)t(Y)$, $t(X)^+ = t(X^+)$ und $\|t(X)\| = \|X\|$, die reine Zustände in reine Zustände überführt. Diese Automorphismen haben nach BARGMANN [17] die Gestalt $X \mapsto UXU^{-1}$, wo U ein unitärer oder anti-unitärer Operator ist; die Automorphismengruppe ist topologisch isomorph zu $U(H) \cup AU(H)/\mathbb{C}_1$, wo $U(H)$ die Gruppe der unitären Operatoren mit der starken Topologie ist, $AU(H)$ die Menge der anti-unitären Operatoren mit der starken Topologie und $\mathbb{C}_1 := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ ein zentraler Normalteiler.

Als Strahldarstellung einer Lie-Gruppe G auf dem Hilbertraum H bezeichnen wir einen stetigen Homomorphismus von G in $U(H) \cup AU(H)/\mathbb{C}_1$. BARGMANN [10] hat gezeigt, daß man immer lokale Repräsentanten der Bilder unter diesem Homomorphismus derart wählen kann, daß man eine stetige Multiplikator Darstellung mit einem lokal analytischen Exponenten erhält. Ist G einfach zusammenhängend, so kann man die Exponenten global differenzierbar machen; i.a. kann man die Exponenten nicht global analytisch machen. Wir definieren als Multiplikator Darstellung von G auf H eine stetige Abbildung $M: G \rightarrow U(H) \cup AU(H)$ mit $M(g)M(g') = \exp(i\tau(g, g'))M(gg')$, wobei der Exponent τ analytisch sein soll ($\exp \cdot i\tau$ ist der Multiplikator). Eine Vektordarstellung von G auf H ist ein stetiger Homomorphismus von G in die Gruppe der unitären oder anti-unitären Operatoren von H , also eine Multiplikator Darstellung mit dem Exponent 0, so daß wir von Vektordarstellungen nicht gesondert zu sprechen brauchen. Eine Lie-Gruppendarstellung soll immer eine Strahldarstellung oder eine Multiplikator Darstellung sein.

§1 Deformation von Lie-Gruppendarstellungen

Um Analytizitätsforderungen an Darstellungen stellen zu können, müssen wir erst erklären, was Analytizität in einem unendlich-dimensionalen Vektorraum heißen soll: Eine Abbildung von einer analytischen Mannigfaltigkeit in einen topologischen Vektorraum heißt ana-

lytisch, wenn sie sich um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickeln läßt; ein Vektor x eines topologischen Vektorraums V heißt analytisch bezüglich einer stetigen Darstellung R einer Lie-Gruppe G auf V , wenn $g \mapsto R(g)x$ analytisch ist. Nach NELSON [18] hat jede stetige Darstellung einer Lie-Gruppe auf einem Banachraum eine dichte Teilmenge von analytischen Vektoren. Insbesondere haben also Strahldarstellungen und Multiplikator-darstellungen von Lie-Gruppen dichte Teilmengen von analytischen Vektoren (die Vektoren sind dabei im Fall von Strahldarstellungen die Elemente von $C^*(H)$).

Ist H ein Hilbertraum, so soll $P(H)$ für Multiplikator-darstellungen H selbst sein und für Strahldarstellungen die Menge der eindimensionalen Projektoren auf H ; $IP(H)$ soll für Multiplikator-darstellungen $IP(H) \cup A \cap IP(H)$ sein und für Strahldarstellungen $IP(H) \cup A \cap IP(H) / \mathbb{C}_1$.

1.1 Definition: Sei G eine Lie-Gruppe und I ein offenes Intervall um 0 ; dann ist eine Deformation der Lie-Gruppendarstellung $R: G \rightarrow IP(H)$ ein Paar (D, U) von stetigen Abbildungen $D: I \times G \times G \rightarrow G$ und $U: I \times G \rightarrow IP(H)$ derart, daß D eine Deformation von G ist und

- i) $U_s := U(s, \cdot)$ für alle s aus I eine Lie-Gruppendarstellung von $(G, D(s, \cdot, \cdot))$ ist mit $U_0 = R$,
- ii) die Menge A der x aus $P(H)$ derart, daß $Ux: I \times G \rightarrow P(H)$, $Ux(s, g) := U(s, g)x$, analytisch ist, dicht in $P(H)$ ist.

A heißt Analytizitätsbereich von U , die Elemente von A heißen analytische Vektoren von U .

Die Forderung, daß A dicht sein soll, entspringt dabei dem Wunsch nach einer Basis, in der man U nach s und g entwickeln kann; klarerweise muß A in dem Analytizitätsbereich von R enthalten sein. Andererseits können wir nicht fordern, daß alle Vektoren analytisch sind, da sonst ein großer Teil der bekannten Darstellungen von Lie-Gruppen ausgeschlossen würde, von dem wir wissen, daß die Menge der analytischen Vektoren zwar dicht ist, aber nicht jeder Vektor analytisch.

Sind zwei Darstellungen R_1 und R_2 zweier Lie-Gruppen gegeben, so kann man durch Bildung des Tensor-Produkts eine Darstellung des direkten Produkts der beiden Gruppen gewinnen. Darüberhinaus ist für die Multiplikator-darstellungen einer Lie-Gruppe die Bildung eines direkten Integrals möglich, falls ihre Multiplikatoren gleich sind

1.2 Lemma: Seien $D_i: I \times G_1 \times G_1 \longrightarrow G_1$ eine Deformation der Lie-Gruppe G , $R_i: G_1 \longrightarrow \mathbb{P}(H_1)$ eine Lie-Gruppendarstellung und $(D_i, U^{(i)})$ mit $U^{(i)}: I \times G_1 \longrightarrow \mathbb{P}(H_1)$ eine Deformation von R_i mit Analytizitätsbereich A_i , $i = 1, 2$. Dann gilt:

i) $D: I \times G_1 \otimes G_2 \times G_1 \otimes G_2 \longrightarrow G_1 \otimes G_2$, $D(s; g_1, g_2; g'_1, g'_2) := (D_1(s, g_1, g'_1), D_2(s, g_2, g'_2))$, ist eine Deformation von $G_1 \otimes G_2$;

ii) (D, U) mit $U: I \times G_1 \otimes G_2 \longrightarrow \mathbb{P}(H_1 \otimes H_2)$, $U(s, g_1, g_2) := U^{(1)}(s, g_1) \otimes U^{(2)}(s, g_2)$, ist eine Deformation der Lie-Gruppendarstellung $R_1 \otimes R_2$, von $G_1 \otimes G_2$, deren Analytizitätsbereich $A_1 \otimes A_2$ enthält.

Beweis: (i) ist trivial. (ii) Mit $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ ist auch $(g_1, g_2) \mapsto U^{(1)}x_1 \otimes U^{(2)}x_2$ für alle $x_1 \otimes x_2$ aus $\mathbb{P}(H_1) \otimes \mathbb{P}(H_2)$ stetig; da die lineare Hülle von $\mathbb{P}(H_1) \otimes \mathbb{P}(H_2)$ in $\mathbb{P}(H_1 \otimes H_2)$ dicht liegt, ist $(g_1, g_2) \mapsto U(g_1, g_2)x$ für alle $x \in \mathbb{P}(H_1 \otimes H_2)$ stetig. Weiter enthält der Analytizitätsbereich von $U^{(1)} \otimes U^{(2)}$ die Menge $A_1 \otimes A_2$ und ist somit dicht in $\mathbb{P}(H_1 \otimes H_2)$. Schließlich ist für alle s aus I $U(s, \cdot)$ eine Lie-Gruppendarstellung von $(G_1 \otimes G_2, D(s; \cdot, \cdot))$ mit $U(0, \cdot) = R_1 \otimes R_2$.

1.3 Korollar: Ist $(D, U^{(i)})$ eine Deformation der Lie-Gruppendarstellung $R_i: G \longrightarrow \mathbb{P}(H_i)$, $i = 1, 2$, so ist (D, U) mit $U: I \times G \longrightarrow \mathbb{P}(H_1 \otimes H_2)$, $U(s, g) := U^{(1)}(s, g) \otimes U^{(2)}(s, g)$, eine Deformation von $R_1 \otimes R_2: G \longrightarrow \mathbb{P}(H_1 \otimes H_2)$, $R_1 \otimes R_2(g) := R_1(g) \otimes R_2(g)$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus 1.2 mit $G_1 = G_2 =: G$ durch Einschränkung von $G \otimes G$ auf die zu G analytisch isomorphe abgeschlossene Untergruppe $\Delta(G) := \{(g, g) \mid g \in G\}$.

Wir benutzen die Schreibweise $R_1 \otimes R_2$ sowohl für die Darstellung von $G \otimes G$ wie auch für die gemäß 1.3 definierte Darstellung von G , da aus dem Zusammenhang, in dem die Begriffe gebraucht werden, stets hervorgeht, welche der beiden Darstellungen gemeint ist.

1.4 Lemma: Sei $D: I \times G \times G \longrightarrow G$ eine Deformation der Lie-Gruppe G und (D, U^X) für alle x aus einer Menge X eine Deformation der Multiplikator Darstellung R^X von G auf H_x , wobei zu jedem s aus I die Multiplikatoren der U_s^X für alle x aus X gleich sein sollen. Dann ist (D, U) mit $U: I \times G \longrightarrow \mathbb{P}(\bigoplus_{x \in X} H_x)$, $U(s, g) := \bigoplus_{x \in X} U^X(s, g)$,

eine Deformation der Multiplikator-darstellung $\bigoplus_{x \in X} R^x$ von G .

Beweis: Der Hilbertraum $\bigoplus_{x \in X} H_x$ besteht aus den Abbildungen $f: X \rightarrow \bigcup_{x \in X} H_x$ mit $f(x) \in H_x$, $f(x) = 0$ bis auf abzählbar viele x aus X und $\sum_{x \in X} \|f(x)\|_x^2 < \infty$; die Addition und Multiplikation mit einer komplexen Zahl sind punktweise definiert und das Skalarprodukt als $\langle f, g \rangle := \sum_{x \in X} \langle f(x), g(x) \rangle_x$. Die direkte Summe $\bigoplus_{x \in X} M^x$ der Operatoren M^x ist gegeben durch: $((\bigoplus_{x \in X} M^x)f)(y) := \sum_{x \in X} M^x f(y)$; sind die M^x beschränkt, so gilt: $\|\bigoplus_{x \in X} M^x\| = \sup_{x \in X} \|M^x\|_x$, und sind die M^x unitär, so ist auch $\bigoplus_{x \in X} M^x$ unitär.

Ist A_x der Analytizitätsbereich von U^x , dann ist $(\bigoplus_{x \in X} U^x)f$ für f aus der Menge $\{f \in \bigoplus_{x \in X} H_x \mid f(x) \in A_x \text{ und } f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in X\}$ analytisch, und da diese Menge dicht ist in $\bigoplus_{x \in X} H_x$, ist $\bigoplus_{x \in X} U^x$ stetig. Da die Multiplikatoren für feste s für alle x gleich sind, ist $\bigoplus_{x \in X} U^x(s, \cdot)$ für alle s offensichtlich eine Multiplikator-darstellung von $(G, D(s, \dots))$.

Da die Hilberträume H_x für jedes x aus X separabel sein sollen, ist der Hilbertraum $\bigoplus_{x \in X} H_x$ genau dann separabel, wenn H_x nur für eine abzählbare Teilmenge von X verschieden von $\{0\}$ ist. Reduziert man das Tensor-Produkt zweier unendlich-dimensionaler irreduzibler Darstellungen aus, so erhält man i.a. keine direkte Summe, sondern ein direktes Integral. Bevor wir uns mit dem direkten Integral in voller Allgemeinheit beschäftigen, beweisen wir

1.5 Lemma: Sei (X, S, m) ein Maßraum, H ein separabler Hilbertraum, G eine Lie-Gruppe, und (D, U^x) für alle x aus X eine Deformation der Multiplikator-darstellung $R^x: G \rightarrow \mathcal{P}(H_x)$ mit Analytizitätsbereich A , wobei zu jedem s aus I die Multiplikatoren der $U^x(s, \cdot)$ für alle x aus X gleich sind. Ist $(x, s, g) \mapsto U^x(s, g)f$ für alle f aus H meßbar, so ist (D, U) mit $U: I \times G \rightarrow \mathcal{P}(L_2^m(X, H))$, $(U(\cdot)f)(x) := U^x(\cdot)f(x)$, eine Deformation der Darstellung $R: G \rightarrow \mathcal{P}(L_2^m(X, H))$ $(R(g)f)(x) := R^x(g)f(x)$.

Beweis: Da $(x, s, g) \mapsto U^x(s, g)f$ meßbar ist, ist auch $(x, g) \mapsto U^x(s, g)f$ meßbar und damit $U(s, \cdot)$ eine Darstellung von $(G, D(s, \cdot))$. Weiter ist $(s, g) \mapsto U(s, g)f$ analytisch für $f \in L_2^m(X, H)$ von der Form $f = \sum_{n=1}^N f_n \chi_{X_n}$,

$f_n \in A$, $X_n \in S$ mit $m(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Da die Menge dieser f wegen der Separabilität von H in $L_2^m(X, H)$ dicht ist, ist U eine Deformation von R [19; p.131].

Bei direkten Integralen von Darstellungen läßt sich die Meßbarkeit nicht so einfach formulieren. Vielmehr muß man dazu zunächst eine "Fundamentalfolge" des direkten Integrals einführen (siehe hierzu [20; chap. II]).

1.6 Satz: Sei (X, S, m) ein Maßraum, H_x für alle x aus X ein separabler Hilbertraum und $H := \bigoplus_X m(dx) H_x$ ein direktes Integral mit Fundamentalfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei G eine Lie-Gruppe, $D: I \times G \rightarrow G$ eine Deformation von G und (D, U^X) , $U^X: I \times G \rightarrow \mathcal{P}(H_x)$, für alle x aus X eine Deformation der Multiplikator Darstellung R^X mit Analytizitätsbereich A_x , wobei zu jedem s aus I die Multiplikatoren der $U^X(s, \cdot)$ für alle x aus X gleich sind. Ist $(x, s, g) \mapsto U^X(s, g)f(x)$ für alle $f \in H$ meßbar, und gibt es eine Folge $(X^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ mit

$$i) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n = \{x \in X \mid \dim(H_x) = \infty\} =: X_\infty,$$

$$ii) m(X^n) = 0 \text{ oder } \bigcap_{x \in X^n} E^X(A_x) \text{ ist dicht in } H_\infty,$$

wobei H_∞ ein Hilbertraum mit Hilbert-Basis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist und $E^X: H_x \rightarrow H_\infty$ für $x \in X_\infty$ durch $E^X f := \sum_{i=0}^{\infty} \langle y_i(x), f \rangle_{x} e_i$ gegeben ist, dann ist (D, U) mit $U: I \times G \rightarrow \mathcal{P}(\bigoplus_X m(dx) H_x)$, $U := \bigoplus_X m(dx) U^X$, eine Deformation der Darstellung $R := \bigoplus_X m(dx) R^X$.

Beweis: H ist wegen (i) isomorph zu $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{X_n} m(dx) H_x \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L_2^m(X^n, H_\infty)$,

wo $X_n := \{x \in X \mid \dim(H_x) = n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Da eine dichte lineare Teilmenge eines endlich-dimensionalen Hilbertraumes gleich dem ganzen Hilbertraum ist, treffen für X_n und wegen (ii) auch für X^n mit $m(X^n) \neq 0$ die Voraussetzungen von 1.5 zu, so daß wegen 1.4 R eine Darstellung von G ist und (D, U) eine Deformation von R .

Auf Grund von 1.6 kann man bei Kenntnis der Deformationen der irreduziblen Multiplikator Darstellungen einer Lie-Gruppe Deformationen einer großen Klasse von reduziblen Multiplikator Darstellungen gewinnen, indem man zunächst ausreduziert, die irreduziblen Komponenten deformiert, und dann die Zerlegung rückgängig macht. Es ist aber offen, ob die als Tensor-Produkte gemäß 1.3 gewonnenen Deformationen im wesentlichen mit den über deren Integralzerlegung gemäß 1.6 gewonnenen Deformationen übereinstimmen. Auf diese Frage werden wir für den Spezialfall der Kontraktion zurückkommen.

Jeder Multiplikatorardarstellung R ist gemäß $g \mapsto R(g)XR(g)^{-1}$ eine Strahldarstellung $[R]$ zugeordnet; für diese zugeordnete Strahldarstellung gilt:

1.7 Lemma: Sei (D, U) eine Deformation der Multiplikatorardarstellung $R: G \rightarrow \text{IP}(H)$ der Lie-Gruppe G ; dann ist $(D, [U])$, $[U](s, g) := [U(s, g)]$, eine Deformation der Strahldarstellung $[R]$ von G .

Beweis: $[U]$ erfüllt trivialerweise die algebraischen Eigenschaften einer Deformation; ist x ein analytischer Vektor von U , so ist der Projektor $x \rangle \langle x$ ein analytischer Vektor von $[U]$, und somit $[U]$ eine Deformation von $[R]$.

§2 Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen

Die Kontraktoren von Lie-Transformationsgruppen haben wir in 3.2.1 als Paare (K, J) erklärt, wobei die Deformation der Wirkung die Form $(s, g, x) \mapsto J_s^{-1}(w'(K_s(g), J_s(x)))$ hat. Für Lie-Gruppendarstellungen ist diese Form zu eng, da aus ihr für ein zentrales Element $C(x)$ der universellen Einhüllenden der Lie-Algebra folgt, daß der Eigenwert von $C(x)$ in der Darstellung der einen Gruppe in einen Eigenwert von $C(\partial K_0(x))$ übergeführt wird, denn die Eigenwerte ändern sich unter Äquivalenztransformationen nicht.

Orientieren wir uns am Beispiel des Übergangs der Lichtgeschwindigkeit $c \mapsto \infty$, also am Übergang von der Poincarésymmetrie zur Galileisymmetrie. Hier wird gefordert: $E_0 = mc^2$, wo E_0 die Ruheenergie und m die Ruhemasse eines Teilchens ist. Setzen wir als Kontraktionsparameter $s = 1/c$, so schreibt sich diese Formel als $E_0(s) = E_0(1)s^{-2}$. Nun charakterisiert aber das Quadrat der Ruheenergie $E_0^2 = p_0^2 - c^2 p^2$ die irreduziblen Darstellungen der Poincarégruppe, und der Übergang von einer durch $E_0(1)$ zu einer durch $E_0(s)$ charakterisierten Darstellung läßt sich durch einen Übergang $R(a, L)$

$\mapsto R(s^{-2}a, L)$ beschreiben. Darum lassen wir bei der Kontraktion von Darstellungen die Form $(s, g) \mapsto J_s^{-1}R'(T_s^{-1}(K_s(g)))J_s$ zu, wo T_s für $s \neq 0$ ein Automorphismus sein soll. Da die Identität immer ein Automorphismus ist, ist die Definition 3.2.1 in gewisser Weise ein Spezialfall.

Statt durch K könnten wir uns die Deformation D^K jetzt auch durch K' mit $K'_s := T_s^{-1} \circ K_s$ erzeugt denken, denn für $s \neq 0$ gilt

$$K_s^{-1}(v'(K'_s(g), K'_s(g'))) = K_s^{-1} \circ T_s(v'(T_s^{-1} \circ K_s(g), T_s^{-1} \circ K_s(g'))) =$$

$= K_s^{-1}(v'(K_s(g), K_s(g'))) = D^K(s, g, g')$; durch den Verzicht auf die Analytizität von K' auch für $s = 0$ würde die Kontraktion der Darstellungen dann die einfache Gestalt $(s, g) \mapsto J_s^{-1} R'(K'_s(g)) J_s$ annehmen. Da wir aber -bei ein und derselben Kontraktion K - i.a. für die verschiedenen Darstellungen verschiedene T wählen müssen, müßten wir auch verschiedene "Kontraktionen" K' wählen. Unsere Form ist also besser geeignet, um die Kontraktion der Darstellungen als Ergebnis einer gegebenen Kontraktion der Gruppe zu beschreiben.

Wir haben unseren Ansatz durch Betrachtung der Poincarégruppe gewonnen. Die Poincarégruppe wirkt aber auch auf den $\mathbb{R}^4$ und läßt sich gemäß 3.4.2 auf die Galileigruppe kontrahieren. Kann man diese Kontraktion auch auf die obige Form bringen mit $T_s(a, L) := (s^2 a, L)$? Das ist der Fall, aber J_s nimmt dann die Gestalt $J_s(x_0, x) := (s^{-2} x_0, s^{-1} x)$ an, ist also für $s = 0$ nicht definiert und auch nicht stetig definierbar; J_s^{-1} allerdings ist analytisch definierbar. Bei der Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen wollen wir deshalb auf die Analytizität von J für $s = 0$ verzichten.

Für Multiplikator Darstellungen sei $\mathcal{P}(H, H')$ die Menge der linearen und anti-linearen Isomorphismen von dem Hilbertraum H auf den Hilbertraum H' , für Strahldarstellungen sei $\mathcal{P}(H, H')$ die Menge der bijektiven Isometrien von $P(H)$ auf $P(H')$ bezüglich der Metrik

$$d(P, P') := \sqrt{1 - |\text{Spur } PP'|} \text{ auf } \mathcal{P}(H) \text{ und } \mathcal{P}(H').$$

2.1 Definition: Ein Kontraktor von einer Lie-Gruppendarstellung $R: G \rightarrow \mathcal{P}(H)$ auf eine Lie-Gruppendarstellung $R': G' \rightarrow \mathcal{P}(H')$ ist ein Tripel (K, J, T) von analytischen Abbildungen $K: I \times G \rightarrow G'$, $T: I \times G' \rightarrow G'$ und einer Abbildung $J: I \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{P}(H, H')$ mit den folgenden Eigenschaften:

- i) K ist ein Kontraktor von G auf G' ;
- ii) $T_s := T(s, \cdot)$ ist für $s \neq 0$ ein Automorphismus von G' und es gibt eine dichte Teilmenge A von $P(H)$, derart, daß $Jx: I \setminus \{0\} \rightarrow P(H')$, $Jx(s) := J_s x := J(s)x$, für alle x aus A analytisch ist;
- iii) $U^{(K, J, T)}: I \times G \rightarrow \mathcal{P}(H)$, $U^{(K, J, T)}(s, g) := J_s^{-1} R'(T_s^{-1} \circ K_s(g)) J_s$ für $s \neq 0$ und $U^{(K, J, T)}(0, g) := R(g)$, ist eine Deformation der Lie-Gruppendarstellung R , deren Analytizitätsbereich A enthält.

Das Paar $(D^K, U^{(K, J, T)})$ heißt Kontraktion der Lie-Gruppendar-

stellung R' .

Sei $w:G \longrightarrow \mathbb{C}_1$ eine analytische Abbildung; dann ist ein Kontraktor bis auf einen Faktor w ein Tripel (K, J, T) mit den Eigenschaften (i) und (ii) derart, daß

- iii') $U^{(K, J, T, w)}: I \times G \longrightarrow \mathbb{P}(H)$, $U^{(K, J, T, w)}(0, g) := R(g)$ und
 $U^{(K, J, T, w)}(s, g) := w(T_s^{-1} \circ K_s(g)) U^{(K, J, T)}(s, g)$ für $s \neq 0$,
 eine Deformation der Multiplikator-darstellung R ist, deren Analytizitätsbereich A enthält.

Das Paar $(D^K, U^{(K, J, T, w)})$ heißt Kontraktion bis auf einen Faktor w der Lie-Gruppendarstellung R' .

Aus der Analytizität von J folgt, daß J_s für $s > 0$ entweder nur linear oder nur anti-linear ist.

2.2 Lemma: Sei $(K^{(i)}, J^{(i)}, T^{(i)})$ ein Kontraktor bis auf den Faktor w_i von der Lie-Gruppendarstellung $R_i: G_i \longrightarrow \mathbb{P}(H_i)$ auf die Lie-Gruppendarstellung $R'_i: G'_i \longrightarrow \mathbb{P}(H'_i)$, $i = 1, 2$. Dann ist (K, J, T) mit

- i) $K: I \times G_1 \otimes G_2 \longrightarrow G'_1 \otimes G'_2$, $K(s, g_1, g_2) := (K^{(1)}(s, g_1), K^{(2)}(s, g_2))$,
 ii) $J: I \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(H_1 \otimes H_2, H'_1 \otimes H'_2)$, $J(s) := J^{(1)}(s) \otimes J^{(2)}(s)$,
 iii) $T: I \times G'_1 \otimes G'_2 \longrightarrow G'_1 \otimes G'_2$, $T(s, g'_1, g'_2) := (T^{(1)}(s, g'_1), T^{(2)}(s, g'_2))$,
 ein Kontraktor bis auf den Faktor $w_1 w_2$ von der Lie-Gruppendarstellung $R_1 \otimes R_2: G_1 \otimes G_2 \longrightarrow \mathbb{P}(H_1 \otimes H_2)$ auf die Lie-Gruppendarstellung $R'_1 \otimes R'_2: G'_1 \otimes G'_2 \longrightarrow \mathbb{P}(H'_1 \otimes H'_2)$.

Beweis: Verläuft analog zu dem von 1.2 .

2.3 Korollar: Ist $(K, J^{(i)}, T)$ ein Kontraktor bis auf den Faktor w_i von der Lie-Gruppendarstellung $R_i: G \longrightarrow \mathbb{P}(H_i)$ auf die Lie-Gruppendarstellung $R'_i: G' \longrightarrow \mathbb{P}(H'_i)$, $i = 1, 2$, so ist (K, J, T) , wobei J wie in 2.2 ii) definiert ist, ein Kontraktor bis auf den Faktor $w_1 w_2$ von der Lie-Gruppendarstellung $R_1 \otimes R_2: G \longrightarrow \mathbb{P}(H_1 \otimes H_2)$ auf die Lie-Gruppendarstellung $R'_1 \otimes R'_2: G' \longrightarrow \mathbb{P}(H'_1 \otimes H'_2)$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus 2.2 analog zum Beweis von 1.3 .

Wir nennen die Automorphismenschar $T: I \times G' \longrightarrow G'$ zulässig für eine Menge M von Lie-Gruppendarstellungen von G' , wenn es für jede

Lie-Gruppendarstellung R' aus M eine Lie-Gruppendarstellung R von G und einen Kontraktor (K, J, T) von R auf R' gibt. Wir werden im folgenden zeigen, daß es in vielen Fällen genügt, dies für die irreduziblen Komponenten der R' aus M zu erfüllen.

2.4 Satz: Sei (X, S, m) ein Maßraum, H_x und H'_x für alle x aus X separable Hilberträume und (K, J^x, T) für alle x aus X ein Kontraktor bis auf einen Faktor w von der Multiplikator Darstellung $R^x: G \rightarrow \mathcal{P}(H_x)$ auf die Multiplikator Darstellung $R'^x: G \rightarrow \mathcal{P}(H'_x)$ mit Analytizitätsbereich A_x , wobei die Multiplikatoren sowohl von R^x als auch von R'^x für alle x aus X gleich sind. Sind $(x, s) \mapsto J^x(s)f(x)$, $(x, s, g) \mapsto R^x(s, g)f(x)$ und $(x, s, g') \mapsto R'^x(s, g')f'(x)$ für alle f aus $\bigoplus_X m(dx) H_x$ und alle f' aus $\bigoplus_X m(dx) H'_x$ meßbar und gibt es eine Folge $(X^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ derart, daß $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und A_x die Bedingungen (i) und (ii) von 1.6 erfüllen, so sind $R := \bigoplus_X m(dx) R^x$ und $R' := \bigoplus_X m(dx) R'^x$ Multiplikator Darstellungen, und $(K, \bigoplus_X m(dx) J^x, T)$ ist ein Kontraktor bis auf einen Faktor w von R auf R' .

Beweis: Der Beweis erfolgt mit denselben Methoden wie der von 1.4 bis 1.6.

Wir wollen hier die nach 1.6 gestellte Frage aufgreifen: Ein Tensor-Produkt von Multiplikator Darstellungen und ein direktes Integral seien äquivalent; sind dann auch die als Tensor-Produkt und als direktes Integral gewonnenen Kontraktoren im wesentlichen identisch? Diese Frage können wir jetzt teilweise beantworten. Sei

$\bigoplus_X m(dx) R'^x$ die Integral-Zerlegung des direkten Produkts zweier irreduzibler Multiplikator Darstellungen R'_1 und R'_2 , also $R'_1 \otimes R'_2 = \tilde{A}^{-1} \left(\bigoplus_X m(dx) R'^x(\cdot) \right) \tilde{A}$, und $J^{(1)}$ bzw. J^x der Darstellung R'_1 bzw. R'^x , $i = 1, 2$, zugeordnet; kann man die $J^{(1)}$, $J^{(2)}$ und J^x so wählen, daß auch $J_s^{(1)} \otimes J_s^{(2)} = \tilde{A}_s^{-1} \left(\bigoplus_X m(dx) J_s^x \right) \tilde{A}_s$ ist, so sind die als Tensor-Produkt und als direktes Integral gewonnenen Kontraktoren wesentlich gleich, da dann

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_s J_s^{(1)} \otimes J_s^{(2)} \tilde{A}_s^{-1})^{-1} \tilde{A} (R'_1 \otimes R'_2)(\cdot) \tilde{A}^{-1} (\tilde{A}_s J_s^{(1)} \otimes J_s^{(2)} \tilde{A}_s^{-1}) &= \\ &= \bigoplus_X m(dx) (J_s^x)^{-1} R'(\cdot) J_s^x. \end{aligned}$$

Ein solcher Fall von physikalischem Interesse liegt in 6.1.8 vor.

2.5 Lemma: Sei (K, J, T) ein Kontraktor bis auf einen Faktor w von

der Multiplikator-darstellung R auf die Multiplikator-darstellung R' ; dann ist $(K, [J], T)$ mit $[J](s) := [J(s)]$ ein Kontraktor von der Strahldarstellung $[R]$ auf die Strahldarstellung $[R']$.

Beweis: Folgt aus 1.7 .

§3 Einfache Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen

3.1 Definition: Ein einfacher Kontraktor von einer Lie-Gruppendarstellung $R: G \rightarrow \text{IP}(H)$ auf eine Lie-Gruppendarstellung $R': G' \rightarrow \text{IP}(H)$ ist ein Kontraktor (K, J, T) von R auf R' derart, daß K ein einfacher Kontraktor von G auf G' ist und $T_s \circ T_t = T_{st}$ für alle s, t aus I sowie $J_s J_t = J_{st}$ für alle s, t aus $I \setminus \{0\}$, mit st in I . Die Deformation $(D^K, U^{(K, J, T)})$ von R heißt einfache Kontraktion von R' .

Ein einfacher Kontraktor bis auf einen Faktor von einer Multiplikator-darstellung R auf eine Multiplikator-darstellung R' sei analog als Kontraktor bis auf einen Faktor (K, J, T) definiert mit K einfach, $T_s \circ T_t = T_{st}$ für alle s, t aus I und $J_s J_t = J_{st}$ für alle s, t aus $I \setminus \{0\}$, mit st in I . $(D^K, U^{(K, J, T, w)})$ heißt einfache Kontraktion von R' bis auf einen Faktor w , wobei w der Faktor von (K, J, T) ist.

Eine einfache Kontraktion von R' bis auf den Faktor w hat also die Form $(s, g) \mapsto w(T_s^{-1} \circ K_s(g)) J_s^{-1} R'(T_s^{-1} \circ K_s(g)) J_s$, wo $s \mapsto K_s$ eine analytische Abbildung von I in die Endomorphismen von G ist und $s \mapsto T_s$ eine analytische Abbildung in die Endomorphismen von G' ; diese Abbildungen lassen sich analog zu 2§3.2 eindeutig auf ganz $\mathbb{R}$ fortführen. Ebenso kann $s \mapsto J_s$ gemäß $\hat{J}_s := J_s / n^{J_s} n^{-1}$ eindeutig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ fortgeführt werden und $\hat{J}$ hat den selben Analytizitätsbereich wie J . Somit kann jede einfache Kontraktion einer Lie-Gruppendarstellung eindeutig auf $\mathbb{R}$ fortgeführt werden.

3.2 Lemma: Zu jedem einfachen Kontraktor (K, J, T) gibt es genau eine Fortführung $(\hat{K}, \hat{J}, \hat{T}) = (K \uparrow \mathbb{R}, J \uparrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, T \uparrow \mathbb{R})$; ist (K, J, T) einfacher Kontraktor bis auf einen Faktor w , so gibt es genau eine Fortführung $(\hat{K}, \hat{J}, \hat{T}) = (K \uparrow \mathbb{R}, J \uparrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, T \uparrow \mathbb{R})$, und diese ist auch ein einfacher Kontraktor bis auf den Faktor w .

Wegen $J_s J_t = J_{st}$ ist J eine Vektordarstellung der multiplikativen

Gruppe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; insbesondere ist J_s für $s > 0$ linear. Aus der Existenz der Automorphismenschar T ergibt sich für die Lie-Gruppe G'

3.3 Lemma: Sei G' eine Lie-Gruppe und $T: \mathbb{R} \times G' \rightarrow G'$ eine analytische Abbildung derart, daß $T_s := T(s, \cdot)$ für $s \neq 0$ ein Automorphismus von G' ist und $T_s \circ T_t = T_{st}$ für alle s, t . Dann ist $T_0(G')$ eine abgeschlossene Untergruppe von G' , $T_0^{-1}(e)$ ein einfach zusammenhängender nilpotenter Normalteiler von G' und G' ein semidirektes Produkt von $T_0^{-1}(e)$ mit $T_0(G')$.

Beweis: T ist nach den Voraussetzungen ein einfacher Kontraktor von G' auf G' ; hiermit folgt die Behauptung aus 2.3.4. ■

Sind T_s und K_t vertauschbar für alle s und t aus $\mathbb{R}$ (dazu genügt, daß sie es in einer Umgebung von 0 sind), so ist T_s auch ein Endomorphismus von G : $v(T_s(g), T_s(g')) = \lim_{t \rightarrow 0} K_t^{-1}(v'(K_t(T_s(g)), K_t(T_s(g')))) = \lim_{t \rightarrow 0} K_t^{-1}(T_s(v'(K_t(g), K_t(g')))) = T_s(v(g, g'))$.

3.4 Lemma: Ist (K, J, T) ein einfacher Kontraktor bis auf den Faktor w von der Multiplikator Darstellung R auf die Multiplikator Darstellung R' , so ist $(K, [J], T)$, $[J](s) := [J(s)]$, ein einfacher Kontraktor von der Strahldarstellung $[R]$ auf die Strahldarstellung $[R']$.

Beweis: Nach 2.5 ist (K, J, T) ein Kontraktor; $[J]_s [J]_t = [J_s] [J_t] = [J_{st}] = [J]_{st} \Rightarrow (K, [J], T)$ ist ein einfacher Kontraktor. ■

Wie man leicht sieht, sind das Tensor-Produkt und das direkte Integral von einfachen Kontraktoren wieder einfache Kontraktoren.

§4 Beispiele für die Kontraktion von Lie-Gruppendarstellungen

Wir wollen hier die am Anfang von 4§2 erwähnte Kontraktion von Darstellungen der Poincaré-Gruppe auf solche der Galilei-Gruppe durchführen.

4.1 Wir gehen dazu von den Überlagerungsgruppen $\widetilde{\text{IO}}(3, 1)_0$ und $\widetilde{\text{IO}}(3)_G$ aus, die auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \text{SU}(2)$ definiert sind:

$$\begin{aligned} \text{i) } \widetilde{\text{IO}}(3)_G: m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U; a'_0, \underline{a}', \underline{v}', U') &:= \\ &= (a_0 + a'_0, \underline{a} + D(U)\underline{a}' + a'_0 \underline{v}, \underline{v} + D(U)\underline{v}', UU') ; \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \widetilde{\text{IO}}(3, 1)_0: m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U; a'_0, \underline{a}', \underline{v}', U') :=$$

$$= (a_0 + \sqrt{1+v^2} a'_0 + \underline{v} \cdot D(U) \underline{a}', \underline{a} + D(U) \underline{a}' + (a_0' + \frac{\underline{v} \cdot D(U) \underline{a}'}{1 + \sqrt{1+v^2}}) \underline{v}, (\sqrt{1+v^2} + \frac{\underline{v} \cdot D(U) \underline{v}'}{1 + \sqrt{1+v^2}}) \underline{v} + D(U) \underline{v}', U(\underline{v}, D(U) \underline{v}') U U') ;$$

dabei ist $D(U) \in SO(3)$ durch

$$\text{iii) } U \underline{x} \cdot \underline{6} U^+ = D(U) \underline{x} \cdot \underline{6} \quad \text{für alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^3$$

und $U(\underline{x}, \underline{v}) \in SU(2)$ durch

$$\text{iv) } U(\underline{x}, \underline{v}) := \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{1+x^2})(1 + \sqrt{1+v^2})}{2(1 + \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+v^2} + \underline{x} \cdot \underline{v})}} \left(\Pi + \frac{\underline{x} \cdot \underline{v} \Pi + i \underline{x} \times \underline{v} \cdot \underline{6}}{(1 + \sqrt{1+x^2})(1 + \sqrt{1+v^2})} \right)$$

gegeben. Man beachte, daß $D(U(\underline{x}, \underline{v})) = D(\underline{x}, \underline{v})$ mit $D(\underline{x}, \underline{v})$ wie in 2.4.1iii. Die Abbildung $K: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $M := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times SU(2)$,

$$\text{v) } K(s, a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) := (a_0, s \underline{a}, s \underline{v}, U),$$

ist ein IW-Kontraktor von $\widetilde{IO(3)}_G$ auf $\widetilde{IO(3,1)}_O$.

4.2 Die kanonische Form einer Darstellung der $\widetilde{IO(3,1)}_O$ ist

$$U_{\text{kan.}}^m: \widetilde{IO(3,1)}_O \rightarrow W(H) \quad \text{mit } m > 0,$$

$$\text{i) } H := \left\{ \left[f \right] \mid f: S_m^+ \rightarrow \mathbb{C}^n, \|f\|^2 := \int_{S_m^+} \mu(dp) f(p)^* R(A_p^{-1})^+ R(A_p^{-1}) f(p), \right. \\ \left. \|f\| < \infty \right\},$$

wo $S_m^+ := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid p^2 = m^2 \wedge p_0 > 0\}$, μ das durch $\mu(dp) := p_0^{-1} d^3p$ gegebene invariante Maß auf S_m^+ , $R: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(\mathbb{C}^n)$ eine stetige Darstellung von $SL(2, \mathbb{C})$ mit $R(SU(2)) \subseteq U(n)$, und $A_p \in SL(2, \mathbb{C})$ durch $A_p A_p^+ = \frac{1}{m}(p_0 \Pi + \underline{p} \cdot \underline{6})$ gegeben ist. Im folgenden sei immer

$$\text{ii) } A_p := \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_0)}} ((m+p_0) \Pi + \underline{p} \cdot \underline{6}).$$

Das Skalarprodukt auf H ist

$$\text{iii) } \langle f, g \rangle := \int_{S_m^+} \mu(dp) f(p)^* R(A_p^{-1})^+ R(A_p^{-1}) g(p),$$

und schließlich

$$\text{iv) } (U_{\text{kan.}}^m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(p) :=$$

$$= e^{i(a_0 p_0 - \underline{a} \cdot \underline{p})} R(\underline{v}, U) f(\sqrt{1+v^2} p_0 - \underline{v} \cdot \underline{p}, (-p_0 + \frac{\underline{v} \cdot \underline{p}}{1 + \sqrt{1+v^2}}) D(U)^{-1} \underline{v} + D(U)^{-1} \underline{p}).$$

Das Element $(\underline{v}, U)$ der $SL(2, \mathbb{C})$ kann man dabei auch schreiben als

$$\text{v) } (\underline{v}, U) = A_{(m\sqrt{1+v^2}, m\underline{v})} U.$$

Durch einen Isomorphismus von H auf $L_2^{\mathcal{A}}(S_m^+, \mathbb{R}^n)$,

$$vi) H \ni f \mapsto f' \in L_2^{\mathcal{A}}(S_m^+, \mathbb{R}^n), f'(p) := R(A_p^{-1})f(p),$$

erhalten wir die WIGNER'sche Form der Darstellung [21]:

$$vii) (U_{Wig}^m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(p) := \\ = e^{i(a_0 p_0 - \underline{a} \cdot \underline{p})} R(Q(\underline{p}, \underline{v})U) f(\sqrt{1+\underline{v}^2} p_0 - \underline{v} \cdot \underline{p}, (-p_0 + \frac{\underline{v} \cdot \underline{p}}{1+\sqrt{1+\underline{v}^2}}) D(U)^{-1} \underline{v} + D(U)^{-1} \underline{p})$$

mit

$$viii) Q(\underline{p}, \underline{v}) := \frac{((m + \sqrt{m^2 + \underline{p}^2})(1 + \sqrt{1 + \underline{v}^2}) - \underline{v} \cdot \underline{p}) \Pi - i \underline{p} \times \underline{v} \cdot \underline{6}}{\sqrt{2(m + \sqrt{m^2 + \underline{p}^2})(m + \sqrt{1 + \underline{v}^2} \sqrt{m^2 + \underline{p}^2} - \underline{v} \cdot \underline{p})(1 + \sqrt{1 + \underline{v}^2})}}.$$

Gehen wir nun von dem Hilbertraum $L_2^{\mathcal{A}}(S_m^+, \mathbb{R}^n)$ über zu dem Hilbert=raum $L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n)$ mittels

$$ix) L_2^{\mathcal{A}}(S_m^+, \mathbb{R}^n) \ni f \mapsto f' \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n),$$

$$f'(\underline{p}) := (m^2 + \underline{p}^2)^{-1/4} f(\sqrt{m^2 + \underline{p}^2}, \underline{p}),$$

so nimmt U_{Wig}^m die Form U^m an:

$$x) (U^m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(\underline{p}) := \\ = e^{i(a_0 \sqrt{m^2 + \underline{p}^2} - \underline{a} \cdot \underline{p})} \sqrt{\sqrt{1 + \underline{v}^2} - \frac{\underline{v} \cdot \underline{p}}{\sqrt{m^2 + \underline{p}^2}}} R(Q(\underline{p}, \underline{v})U) \times \\ \times f(D(U)^{-1}(\underline{p} + (-\sqrt{m^2 + \underline{p}^2} + \frac{\underline{v} \cdot \underline{p}}{1 + \sqrt{1 + \underline{v}^2}})\underline{v})) .$$

U_{kan}^m , U_{Wig}^m und U^m sind äquivalente Vektordarstellungen der $\widehat{IO(3,1)}_0$; multiplizieren wir $U^m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)$ mit e^{-ima_0} , so erhalten wir die Multiplikator-darstellung U^m mit dem trivialen Exponenten $(\sqrt{1 + \underline{v}^2} - 1)a_0' + \underline{v} \cdot D(U)\underline{a}'$:

$$xi) (U^m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(\underline{p}) := \\ = e^{i(a_0(\sqrt{m^2 + \underline{p}^2} - m) - \underline{a} \cdot \underline{p})} \sqrt{\sqrt{1 + \underline{v}^2} - \frac{\underline{v} \cdot \underline{p}}{\sqrt{m^2 + \underline{p}^2}}} R(Q(\underline{p}, \underline{v})U) \times \\ \times f(D(U)^{-1}(\underline{p} + (-\sqrt{m^2 + \underline{p}^2} + \frac{\underline{v} \cdot \underline{p}}{1 + \sqrt{1 + \underline{v}^2}})\underline{v})) .$$

4.3 Definieren wir jetzt die Automorphismenschar $T: \widehat{IO(3,1)}_0 \rightarrow \widehat{IO(3,1)}_0$ durch

$$i) T(s; a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) := (s^2 a_0, s^2 \underline{a}, \underline{v}, U)$$

und die Schar $J: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{W}(L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n))$ durch

$$\text{ii) } (J(s)f)(\underline{p}) := |s|^{-3/2} f\left(\frac{1}{s}\underline{p}\right),$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{iii) } & (J(s)^{-1} U_s^m(T_s^{-1} \circ K_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)) J(s)f)(\underline{p}) = \\ & = e^{i(a_0(\sqrt{m^2 + s^2 \underline{p}^2} - m)/s^2 - \underline{a} \cdot \underline{p})} \sqrt{\frac{s^2 \underline{v} \cdot \underline{p}}{1 + s^2 \underline{v}^2}} \frac{1}{\sqrt{m^2 + s^2 \underline{p}^2}} R(Q(s\underline{p}, s\underline{v})U) \times \\ & \times f(D(U)^{-1}(\underline{p} + (-\sqrt{m^2 + s^2 \underline{p}^2} + \frac{s^2 \underline{v} \cdot \underline{p}}{1 + \sqrt{1 + s^2 \underline{v}^2}})\underline{v})) . \end{aligned}$$

Definieren wir $U_s^m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) := J_s^{-1} U_s^m(T_s^{-1} \circ K_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)) J_s$ für $s \neq 0$ und U_0^m als Multiplikator Darstellung der $\widetilde{IO(3)}_G$,

$$\text{iv) } (U_0^m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(\underline{p}) := e^{i(a_0 \underline{p}^2 / 2m - \underline{a} \cdot \underline{p})} R(U)f(D(U)^{-1}(\underline{p} - m\underline{v})),$$

so ist $U_s^m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f$ für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n)$, die analytisch sind und für $|\underline{p}| \rightarrow \infty$ stärker als jede Potenz von $|\underline{p}|$ abfallen, in $(s, a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)$ analytisch. Denn die Entwicklung von $(U_s^m(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(\underline{p})$ nach Potenzen von $s, a_0, \underline{a}, \underline{v}, U$ enthält nur Koeffizienten der Form

$$\varphi(\underline{p})(\partial_1^{i_1} \partial_2^{i_2} \partial_3^{i_3} f)(D(U_0)^{-1}(\underline{p} + (-\sqrt{m^2 + s_0^2 \underline{p}^2} + \frac{s_0^2 \underline{v}_0 \cdot \underline{p}}{1 + \sqrt{1 + s_0^2 \underline{v}_0^2}})\underline{v}_0)), \text{ wo } \varphi$$

analytisch ist und nicht stärker als ein Polynom wächst für $|\underline{p}| \rightarrow \infty$; dabei wurde benutzt, daß $R(A)$ ein Polynom in den Koeffizienten von A ist [22].

Wegen dieses Sachverhalts ist (K, J, T) ein einfacher Kontraktor von der Multiplikator Darstellung U_0^m der $\widetilde{IO(3)}_G$ auf die Multiplikator Darstellung U^m der $\widetilde{IO(3,1)}_0$ und ein einfacher Kontraktor bis auf den Faktor w , $w(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) := e^{-i m a_0}$, von der Multiplikator Darstellung U_0^m auf die Vektordarstellung U^m der $\widetilde{IO(3,1)}_0$. Auf die Interpretation dieses Kontraktors werden wir in 6§1 eingehen.

Teil II : Deformationen der Poincarégruppe und ihrer Darstellungen

In diesem Teil behandeln wir drei Fragestellungen: 1. Welche Symmetriegruppen sind mit der physikalischen Erfahrung verträglich? 2. Wie sieht die Kinematik einer (3,2)-deSitterwelt aus? 3. Wie werden die Darstellungen der Poincarégruppe zu solchen der Galileigruppe kontrahiert und welche Konsequenzen ergeben sich daraus?

Da die Aussagen dieses Teils - soweit es sich nicht um Postulate handelt - meistens Ergebnis direkter Berechnung sind, verzichten wir auf Beweise und beschränken uns in den Fällen, wo uns das nötig schien, auf Beweis-Skizzen.

Kapitel 5: Deformationen der Poincarégruppe

§1 Welche Symmetriegruppen sind möglich?

Die Frage nach den mit unseren Vorstellungen von einer Kinematik verträglichen Symmetriegruppen ist bereits von BACRY und LÉVY-LEBLOND [23] und von LÉVY-NAHAS [2] aufgeworfen worden. LÉVY-NAHAS fordert, daß die Lie-Algebra der Symmetriegruppe durch eine beliebig kleine Deformation aus der Poincaréalgebra erhalten werden kann. BACRY und LÉVY-LEBLOND dagegen diskutieren das Problem unter allgemeinen Gesichtspunkten, die für eine Kinematik von Bedeutung sind. Ihre Forderungen an die Lie-Algebra einer Symmetriegruppe einer Kinematik sind:

1.1 Die Lie-Algebra ist 10-dimensional und wird aufgespannt von den drei Erzeugenden $\underline{J}$ der Drehgruppe, den drei Erzeugenden $\underline{K}$ der Geschwindigkeits-Transformationen, den drei Erzeugenden $\underline{P}$ der räumlichen Verschiebung und der Erzeugenden H der zeitlichen Verschiebung; dabei soll $\underline{J}$ mit den $\underline{K}$ und mit den $\underline{P}$ die Vertauschungsrelationen von Vektoren erfüllen und mit H vertauschen, in Formeln: .

$$i) \quad [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{n} \cdot \underline{J}] = \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J}, \quad [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{n} \cdot \underline{K}] = \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{K}, \quad [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{n} \cdot \underline{P}] = \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{P}, \\ [\underline{m} \cdot \underline{J}, H] = 0 \quad \text{für alle } \underline{m}, \underline{n} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{wobei } \underline{m} \cdot \underline{X} := m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3.$$

ii) Weiter sollen Parität P und Zeitumkehr T ,

$$P(\underline{m} \cdot \underline{J}) := \underline{m} \cdot \underline{J}, \quad P(\underline{m} \cdot \underline{K}) := -\underline{m} \cdot \underline{K}, \quad P(\underline{m} \cdot \underline{P}) := -\underline{m} \cdot \underline{P}, \quad P(H) := H, \\ T(\underline{m} \cdot \underline{J}) := \underline{m} \cdot \underline{J}, \quad T(\underline{m} \cdot \underline{K}) := -\underline{m} \cdot \underline{K}, \quad T(\underline{m} \cdot \underline{P}) := \underline{m} \cdot \underline{P}, \quad T(H) := -H,$$

Automorphismen der Lie-Algebra sein.

- iii) Schließlich soll die von $\underline{m} \cdot \underline{K}$ erzeugte Untergruppe für kein $\underline{m} \neq 0$ kompakt sein.

Wir wollen einen dritten Weg gehen: von den Forderungen von BACRY und LÉVY-LEBLOND übernehmen wir nur 1.1i und von LÉVY-NAHAS, daß die Gruppe eine Deformation der Poincarégruppe sein soll, wobei das Intervall der Deformation aber nicht beliebig eingeengt, sondern durch die Beobachtung bestimmt sein soll; was wir hierunter verstehen, legen wir in 1.7 fest.

Unsere Annahmen sind also:

- 1.2 Die Symmetriegruppe einer mit der physikalischen Erfahrung verträglichen Kinematik läßt sich durch Deformation der Poincarégruppe erzeugen; ihre Lie-Algebra wird aufgespannt von den drei Erzeugenden $\underline{J}$ der Drehgruppe, den drei Erzeugenden $\underline{K}$ der Geschwindigkeits-Transformationen, den drei Erzeugenden $\underline{P}$ der räumlichen Verschiebung und der zeitlichen Verschiebung H . $\underline{K}$ und $\underline{P}$ sollen mit $\underline{J}$ wie Vektoren kommutieren, H wie ein Skalar:

$$[\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{n} \cdot \underline{J}] = \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J}, \quad [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{n} \cdot \underline{K}] = \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{K}, \quad [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{n} \cdot \underline{P}] = \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{P}, \\ [\underline{m} \cdot \underline{J}, H] = 0.$$

Für die übrigen Vertauschungsrelationen ergibt sich die Form:

$$1.3 \quad [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{n} \cdot \underline{K}] = \underline{K}_J(\underline{m}, \underline{n}) \cdot \underline{J} + \underline{K}_K(\underline{m}, \underline{n}) \cdot \underline{K} + \underline{K}_P(\underline{m}, \underline{n}) \cdot \underline{P} + \underline{K}_H(\underline{m}, \underline{n}) H, \\ [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{n} \cdot \underline{P}] = \underline{L}_J(\underline{m}, \underline{n}) \cdot \underline{J} + \underline{L}_K(\underline{m}, \underline{n}) \cdot \underline{K} + \underline{L}_P(\underline{m}, \underline{n}) \cdot \underline{P} + \underline{L}_H(\underline{m}, \underline{n}) H, \\ [\underline{m} \cdot \underline{K}, H] = \underline{M}_J(\underline{m}) \cdot \underline{J} + \underline{M}_K(\underline{m}) \cdot \underline{K} + \underline{M}_P(\underline{m}) \cdot \underline{P} + \underline{M}_H(\underline{m}) H, \\ [\underline{m} \cdot \underline{P}, \underline{n} \cdot \underline{P}] = \underline{N}_J(\underline{m}, \underline{n}) \cdot \underline{J} + \underline{N}_K(\underline{m}, \underline{n}) \cdot \underline{K} + \underline{N}_P(\underline{m}, \underline{n}) \cdot \underline{P} + \underline{N}_H(\underline{m}, \underline{n}) H \\ [\underline{m} \cdot \underline{P}, H] = \underline{R}_J(\underline{m}) \cdot \underline{J} + \underline{R}_K(\underline{m}) \cdot \underline{K} + \underline{R}_P(\underline{m}) \cdot \underline{P} + \underline{R}_H(\underline{m}) H,$$

wobei die Koeffizienten $\underline{K}_J, \underline{K}_K, \dots, \underline{R}_P, \underline{R}_H$ linear in den Argumenten sind.

Damit folgt aus 1.2:

- 1.4 Für alle Drehungen D gilt:

$$D \underline{X}_Y(\underline{m}, \underline{n}) = \underline{X}_Y(D \underline{m}, D \underline{n}) \text{ für } X = K, L, N \text{ und } Y = J, K, P;$$

$$X_H(\underline{m}, \underline{n}) = X_H(D\underline{m}, D\underline{n}) \text{ für } X = K, L, N;$$

$$DX_Y(\underline{m}) = \underline{X}_Y(D\underline{m}) \text{ für } X = M, R \text{ und } Y = J, K, P;$$

$$X_H(\underline{m}) = X_H(D\underline{m}) \text{ für } X = M, R.$$

Hieraus ergibt sich

$$1.5 \quad \underline{X}_Y(\underline{m}, \underline{n}) = x_{Y\underline{m} \times \underline{n}} \text{ für } X = K, L, N \text{ und entsprechend } x = k, l, n, \\ Y = J, K, P;$$

$$X_H(\underline{m}, \underline{n}) = x_{H\underline{m} \cdot \underline{n}} \text{ für } X = K, L, N \text{ und entsprechend } x = k, l, n;$$

$$\underline{X}_Y(\underline{m}) = x_{Y\underline{m}} \text{ für } X = M, R \text{ und entsprechend } x = m, r, Y = J, K, P;$$

$$X_H(\underline{m}) = 0 \text{ für } X = M, R.$$

Beweis: $DX(\underline{m}, \underline{n}) = X(D\underline{m}, D\underline{n}) \Rightarrow X(\underline{m}, \underline{n}) = D^{-1}X(D\underline{m}, D\underline{n}) \Rightarrow X$ ist Eigenvektor einer zu $D^{(1)} \otimes D^{(1)} \otimes D^{(1)}$ äquivalenten Darstellung der Drehgruppe. Nun gilt: $D^{(1)} \otimes D^{(1)} \otimes D^{(1)} \cong (D^{(0)} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(2)}) \otimes D^{(1)} \cong D^{(0)} \oplus 3 \cdot D^{(1)} \oplus 2 \cdot D^{(2)} \oplus D^{(3)}$, so daß alle Eigenvektoren von $D^{(1)} \otimes D^{(1)} \otimes D^{(1)}$ linear abhängig sind, und somit auch die unserer Darstellung. Weiter ist offensichtlich $\underline{J}, \underline{J}(\underline{m}, \underline{n}) := \underline{m} \times \underline{n}$, ein Eigenvektor, und somit $\underline{X}(\underline{m}, \underline{n}) = x \underline{m} \times \underline{n}$. Die Argumentation in den anderen Fällen ist analog.

Da die Vertauschungsrelationen anti-symmetrisch sind, folgt:

$$K_H(\underline{m}, \underline{n}) = -K_H(\underline{n}, \underline{m}) \Rightarrow k_H = 0, \text{ ebenso } n_H = 0; \text{ somit hat die Lie-Algebra die Form:}$$

$$1.6 \quad [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{n} \cdot \underline{K}] = k_J \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J} + k_K \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{K} + k_P \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{P}, \\ [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{n} \cdot \underline{P}] = l_J \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J} + l_K \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{K} + l_P \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{P} + l_H \underline{m} \cdot \underline{n} H, \\ [\underline{m} \cdot \underline{K}, H] = m_J \underline{m} \cdot \underline{J} + m_K \underline{m} \cdot \underline{K} + m_P \underline{m} \cdot \underline{P}, \\ [\underline{m} \cdot \underline{P}, \underline{n} \cdot \underline{P}] = n_J \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J} + n_K \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{K} + n_P \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{P}, \\ [\underline{m} \cdot \underline{P}, H] = r_J \underline{m} \cdot \underline{J} + r_K \underline{m} \cdot \underline{K} + r_P \underline{m} \cdot \underline{P}.$$

Für die Poincaréalgebra gilt dabei $k_J = -\frac{1}{4}c^2$, $l_H = \frac{1}{4}c^2$, $m_P = 1$,

$k_K = k_P = l_J = l_K = l_P = m_J = m_K = n_J = n_K = n_P = 0$, wobei

$c = (2.997\,925 \pm 0.000\,003) \cdot 10^{10} \text{ cm/sec [24;p.322]}$. Der Viererimpuls $(E, \underline{p})$ geht bei Lorentz-Transformation über in

$$(E', \underline{p}') = \left(\frac{E + \underline{p} \cdot \underline{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \underline{p} + \frac{1}{c^2} \left(E + \frac{\underline{p} \cdot \underline{v}}{1 + \sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \frac{\underline{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \text{ Wir können}$$

darum annehmen, daß für kleine Energien, Impulse und Geschwindigkeiten in einer Umgebung eines Raumzeitpunktes gilt

$$(E', \underline{p}') = (E, \underline{p}) + (\alpha \underline{p} \cdot \underline{v}, \beta E \underline{v}/c^2) + \text{quadratische Terme in } \underline{v}, \underline{J}, \dots + \\ + \text{Terme dritter Ordnung in } \underline{v}, \underline{p}, \dots,$$

$$\text{mit } \alpha \approx 1, \beta \approx 1;$$

damit erhalten wir aus 1.6

$$[\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{n} \cdot \underline{P}] = l_{\underline{J}} \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J} + l_{\underline{K}} \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{K} + l_{\underline{P}} \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{P} + \frac{\Delta}{c^2} E,$$

$$[\underline{m} \cdot \underline{K}, H] = m_{\underline{J}} \underline{m} \cdot \underline{J} + m_{\underline{K}} \underline{m} \cdot \underline{K} + \underline{m} \cdot \underline{P}. \text{ Wir fordern daher von der Lie-Algebra 1.6}$$

$$1.7 \quad |l_H - \gamma c^2| \ll \gamma c^2, \quad |m_P - 1| \ll 1.$$

Für das folgende ist nur wichtig, daß $l_H > 0$ und $m_P > 0$. Damit folgt aus der Jacobi-Identität 1§1.1 für

- 1.8 i) $X = K_1, Y = K_2, Z = K_3: k_P = 0;$
 ii) $X = P_1, Y = P_2, Z = P_3: n_K = 0;$
 iii) $X = P_1, Y = K_1, Z = K_2: k_K = 2l_P, l_{J+1_P} l_K = l_H m_K,$
 $k_{J+1_P} = -l_H m_P;$
 iv) $X = H, Y = K_1, Z = K_2: m_{J+m_K} l_P + m_P l_K = 0;$
 v) $X = K_1, Y = P_1, Z = P_2: n_P = 2l_K, n_{J+1_K}^2 = l_H r_K,$
 $r_{J+r_K} l_P = m_K l_K;$
 vi) $X = H, Y = K_1, Z = P_2: r_P = -m_K.$

Gehen wir jetzt zu neuen Basiselementen $\underline{K}', \underline{P}'$ und H' mit

$$1.9 \quad \underline{K}' := \underline{K} - l_P \underline{J}, \quad \underline{P}' := \underline{P} - l_K \underline{J}, \quad H' := H/m_P,$$

so erhalten wir die Lie-Algebra:

$$1.10 \quad [\underline{m} \cdot \underline{K}', \underline{n} \cdot \underline{K}'] = k_J' \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J} \quad \text{mit } k_J' = -l_H m_P < 0, \\
[\underline{m} \cdot \underline{K}', \underline{n} \cdot \underline{P}'] = l_J' \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J} + l_H' \underline{m} \cdot \underline{n} H' \quad \text{mit } l_J' = l_{J+1_K} l_P, \quad l_H' = l_H m_P, \\
[\underline{m} \cdot \underline{K}', H'] = m_K' \underline{m} \cdot \underline{K}' + \underline{m} \cdot \underline{P}' \quad \text{mit } m_K' = m_K/m_P, \\
[\underline{m} \cdot \underline{P}', \underline{n} \cdot \underline{P}'] = n_J' \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J} \quad \text{mit } n_J' = n_{J+1_K}^2, \\
[\underline{m} \cdot \underline{P}', H'] = r_K' \underline{m} \cdot \underline{K}' + r_P' \underline{m} \cdot \underline{P}' \quad \text{mit } r_K' = r_K/m_P, \quad r_P' = r_P/m_P;$$

die Vertauschungsrelationen 1.1i mit $\underline{J}$ gelten auch für die neuen Basiselemente. Für die Strukturkonstanten von 1.10 haben wir mit $\varepsilon^2 := l_H^1$, $s := l_J^1$ und $t := n_J^1$:

$$1.11 \quad k_J^1 = -\varepsilon^2; \quad l_J^1 = s, \quad l_H^1 = \varepsilon^2; \quad m_K^1 = s/\varepsilon^2; \quad n_J^1 = t; \quad r_K^1 = t/\varepsilon^2, \\ r_P^1 = -s/\varepsilon^2 \quad \text{mit} \quad |\varepsilon^2 - 4c^2| \ll 4c^2;$$

die Lie-Algebren 1.6 sind also durch die drei Parameter ε^2, s und t bis auf Isomorphie festgelegt, insbesondere die Lie-Algebra der Symmetriegruppe einer Kinematik. Wir diskutieren jetzt die möglichen Fälle:

1.12 Fall $t = 0$

i) $s = 0$: Die Lie-Algebren sind für alle $\varepsilon^2 > 0$ isomorph zur Lie-Algebra der Poincarégruppe.

ii) $s \neq 0$: Ersetzen wir $\underline{K}^1$, $\underline{P}^1$ und H^1 durch $\underline{K}''$, $\underline{P}''$ und H'' ,

$$\underline{K}'' := \frac{\text{sign}(s)}{\sqrt{2|s|}} \underline{K}^1 + \left(\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2|s|}} - \frac{1}{\sqrt{2|s|}} \right) \underline{P}^1,$$

$$\underline{P}'' := \frac{\text{sign}(s)}{\sqrt{2|s|}} \underline{K}^1 + \left(\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2|s|}} + \frac{1}{\sqrt{2|s|}} \right) \underline{P}^1,$$

$$H'' := \varepsilon^2/s H^1,$$

so erhalten wir die $o(1,4)$.

Fall $t \neq 0$

Ersetzen wir $\underline{K}^1$ durch $\underline{K}'' := \underline{K}^1 - \frac{s}{t} \underline{P}^1$, so erhalten wir

$$[\underline{m} \cdot \underline{K}'', \underline{n} \cdot \underline{K}''] = -(\varepsilon^2 + s^2/t) \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J}, \quad [\underline{m} \cdot \underline{K}'', \underline{n} \cdot \underline{P}'] = \varepsilon^2 \underline{m} \times \underline{n} H',$$

$$[\underline{m} \cdot \underline{K}'', H'] = \frac{1}{\varepsilon^2} (\varepsilon^2 + s^2/t) \underline{m} \cdot \underline{P}', \quad [\underline{m} \cdot \underline{P}', \underline{n} \cdot \underline{P}'] = t \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J},$$

$$[\underline{m} \cdot \underline{P}', H'] = \frac{t}{\varepsilon^2} \underline{m} \cdot \underline{K}''.$$

Somit ergeben sich die drei Fälle $\varepsilon^2 + s^2/t > 0$, $\varepsilon^2 + s^2/t = 0$ und $\varepsilon^2 + s^2/t < 0$.

i) $\varepsilon^2 + s^2/t > 0$: Durch Multiplikation von $\underline{K}''$, $\underline{P}'$ und H' mit geeigneten Konstanten erhält man für

$t > 0$ die $o(1,4)$ und für

$t < 0$ die $o(2,3)$.

ii) $\varepsilon^2 + s^2/t = 0$: Durch Vertauschung von $\underline{K}''$ und $\underline{P}'$ erhält man

eine zur Lie-Algebra der Poincarégruppe isomorphe Lie-Algebra.

- iii) $\xi^2 + s^2/t < 0$: Durch Multiplikation von $\underline{K}'$, $\underline{P}'$ und $\underline{H}'$ mit geeigneten Konstanten erhält man wieder die $o(1,4)$.

Dieses Ergebnis veranschaulichen wir in Abbildung 1:

1.12

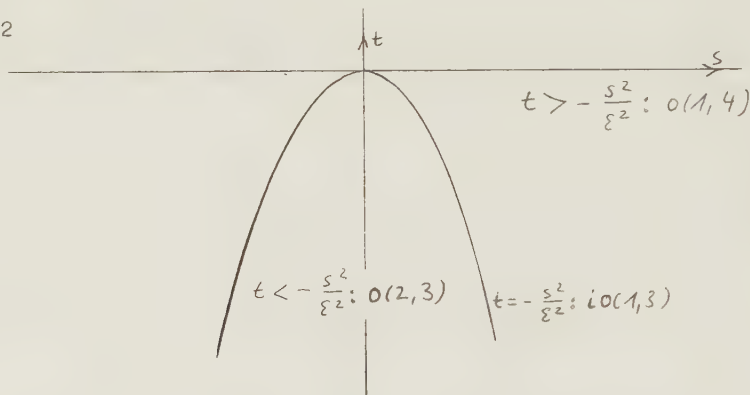


Abbildung 1: Typ der in 1.10 definierten Lie-Algebra

Wir haben dieses Ergebnis ohne jede Beschränkung von s und t erhalten und nur vorausgesetzt, daß $l_H > 0$ und $m_p > 0$. Lassen wir diese Voraussetzung fallen, so sind weitere Lie-Algebren möglich, wie die der Galileigruppe, die der Carrollgruppe, die $io(4)$ und andere. Wir machen nun die weitere Annahme, daß die Symmetriegruppe eine Deformation der Poincarégruppe sein soll (also nicht nur ihre Lie-Algebra eine der $io(1,3)$). Dann bleiben nur noch die Poincarégruppe selbst und die $(2,3)$ -deSittergruppe übrig, denn keine zur $(1,4)$ -deSittergruppe lokal-isomorphe Lie-Gruppe kann auf der Gruppenmannigfaltigkeit der Poincarégruppe definiert werden; für die $O(2,3)_0$ ist dies aber nach 2§4.2 möglich. Wir fassen die Erörterungen dieses Paragraphen zusammen in dem

1.13 Satz: Als kinematische Symmetriegruppe kommen nur zur Poincarégruppe und zur $(2,3)$ -deSittergruppe lokal-isomorphe Lie-Gruppen in Frage.

Dabei muß berücksichtigt werden, daß wir an die Topologie der Symmetriegruppe die Forderung gestellt haben, daß sie homöomorph zu der der Poincarégruppe ist; verzichtet man auf diese (durch lokale Messungen nicht verifizierbare) Annahme, so sind auch zur $(1,4)$ -deSittergruppe lokal-isomorphe Lie-Gruppen als kinematische Symmetriegruppen zulässig. Nach PHILIPS und WIGNER [47] ist aber das Spektrum von H in den Darstellungen der zur $O(1,4)_0$ lokal-isomorphen Lie-Gruppen symmetrisch zum Ursprung, so daß sie aus diesem Grund als Symmetriegruppen einer Kinematik kaum in Frage kommen.

§2 Ein Blick in die Anti-deSitter-Welt

Die Auswirkung der $(1,4)$ -deSittergruppe auf die Raumzeit als homogener Raum dieser Gruppe ist bereits in den zwanziger Jahren untersucht worden. Die $(2,3)$ -deSittergruppe wurde abgelehnt, weil sie zu einer zyklischen Struktur der Zeit führt: die Raumzeit ist diffeomorph zu $S_1 \times \mathbb{R}^3$ [35; p.261,264]. Diese zyklische Struktur kann man aber aufheben, indem man von der $O(2,3)_0$ zu einer Überlagerungsgruppe übergeht, die der Überlagerung von $S_1 \times \mathbb{R}^3$ durch den $\mathbb{R}^4$ entspricht. Man erhält so den $\mathbb{R}^4$ als homogenen Raum einer zur $O(2,3)_0$ lokal-isomorphen Gruppe; dieser homogene Raum hat eine pseudo-Riemann'sche Struktur, die unter der Wirkung der Gruppe invariant ist; die so gewonnene pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist die Anti-deSitter-Welt [36]. Wir wollen hier Invarianzen und Kinematik dieser Raumzeit aus den Eigenschaften ihrer Transformationsgruppe herleiten.

Nach 2.4.2 gibt es eine auf $\mathbb{R}^7 \times P_3$ definierte Überlagerungsgruppe $\overline{O(2,3)}_0$ der $O(2,3)_0$. Wir wollen diese $\overline{O(2,3)}_0$ konkret als Transformationsgruppe der $\mathbb{R}^4$ einführen. Dazu definieren wir

$$2.1 \quad C := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0 \text{ und } |t| < s\}, \quad h: \mathbb{R}^4 C \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

$$h((2k+1)\pi/2, s, t) := (2k+1)\pi/2,$$

$$h(x, s, t) := \arctan(s \tan x + \frac{t}{\cos x}) + k\pi \quad \text{für } x - k\pi \in]-\pi/2, \pi/2[\\ k \in \mathbb{Z};$$

der Wertebereich von $\arctan$ soll dabei $]-\pi/2, \pi/2[$ sein. Die so definierte Funktion ist analytisch, $h(., 1, 0) = \text{id}_{\mathbb{R}}$, und hat die Symmetrien

$$2.2 \quad h(x+2k\pi, s, t) = h(x, s, t) + 2k\pi,$$

$$h((2k+1)\pi - x, s, t) = (2k+1)\pi - h(x, s, t),$$

$$h(-x, s, -t) = -h(x, s, t) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Die erste dieser Symmetrien bedeutet, daß $h(x, s, t) - x$ in x periodisch ist mit der Periode 2π , die zweite, daß $(x, h(x, s, t))$ um die ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ in x spiegelsymmetrisch ist, und die dritte, daß $h(x, s, t)$ in (x, t) spiegelsymmetrisch ist. Für eine graphische Darstellung der Funktion h kann man sich darum auf die Bereiche $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $t \geq 0$ beschränken. Die Abbildung 2 zeigt $h(., s, t)$ für verschiedene Werte von s und t . Die Ableitungen von h sind

$$2.3 \quad \frac{\partial}{\partial x} h(x, s, t) = \frac{s + t \sin x}{\cos^2 x + (s \sin x + t)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} h(x, s, t) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + (s \sin x + t)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, s, t) = \frac{\cos x}{\cos^2 x + (s \sin x + t)^2}$$

Also ist $h(., s, t)$ monoton wachsend und ein analytischer Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$. Für $s \ll 1$ ist $h(., s, t)$ fast (nur fast, denn h ist analytisch!) eine Treppenfunktion, deren Schwellen auf der Höhe der Vielfachen von π liegen und deren Sprungstellen bei den ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ liegen. Für $s \leq 1$ ähnelt $h(., s, t)$ einer an der x -Achse gespiegelten und anschließend um 90° gedrehten Hysteresekurve. Für $s \geq 1$ ähnelt $h(., s, t)$ einer Hysteresekurve und für $s \gg 1$ ist $h(., s, t)$ wieder fast eine Treppenfunktion, deren Schwellen aber auf der Höhe von ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ liegen, und deren Sprungstellen von t abhängen.

Mit Hilfe der Funktion h definieren wir jetzt für die Lorentz-Transformation $L_c(\underline{v}, D)$,

$$2.4 \quad L_c(\underline{v}, D) \in \text{SL}(\mathbb{R}^4) \quad \text{für } \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } D \in \text{SO}(3),$$

$$L_c(\underline{v}, D)(t, \underline{x}) := \left(\sqrt{1 + \underline{v}^2} t + \frac{1}{c} \underline{v} \cdot D \underline{x}, D \underline{x} + \left(ct + \frac{\underline{v} \cdot D \underline{x}}{1 + \sqrt{1 + \underline{v}^2}} \right) \underline{v} \right),$$

die Abbildung $S_{R,c}(L_c(\underline{v}, D)): \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, ($R \neq 0$),

$$2.5 \quad S_{R,c}(L_c(\underline{v}, D))(t, \underline{x}) :=$$

$$= \left(\frac{R}{c} h\left(\frac{ct}{R}, \sqrt{1 + \underline{v}^2}, \frac{\underline{v} \cdot D \underline{x}}{R \sqrt{1 + \underline{x}^2/R^2}}\right), D \underline{x} + \left(R \sqrt{1 + \underline{x}^2/R^2} \sin \frac{ct}{R} + \frac{\underline{v} \cdot D \underline{x}}{1 + \sqrt{1 + \underline{v}^2}}\right) \underline{v} \right),$$

und für $a = (a_0, \underline{a}) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
 2.6 \quad S_{R,c}(a): \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4, S_{R,c}(a)(t, \underline{x}) := \\
 &= \left(\frac{R}{c}(a_0 + \frac{\pi}{2} - h(\frac{\pi}{2} - \frac{ct}{R}, \sqrt{1+\underline{a}^2}), \frac{\underline{a} \cdot \underline{x}}{R\sqrt{1+\underline{x}^2/R^2}} \right), \underline{x} + \\
 &+ \left(R\sqrt{1+\underline{x}^2/R^2} \cos \frac{ct}{R} + \frac{\underline{a} \cdot \underline{x}}{1+\sqrt{1+\underline{a}^2}} \right) \underline{a} \right).
 \end{aligned}$$

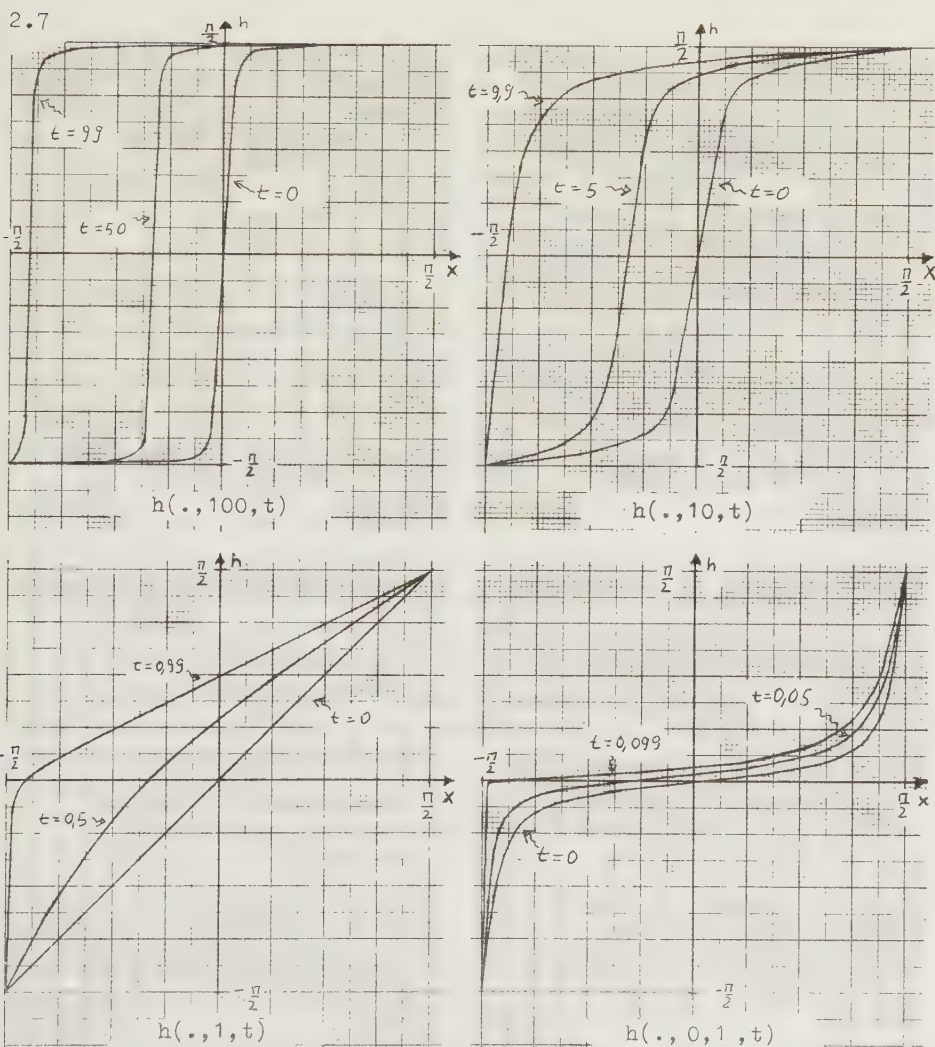


Abb. 2: $h(., s, t)$ für $s = 100, 10, 1, 0.1$ und $t = 0, s/2, 0.99s$

Für die durch $S_{R,c}(a, L_c) := S_{R,c}(a) \circ S_{R,c}(L_c)$ definierte Abbildung von der Poincarégruppe in die Abbildungen des $\mathbb{R}^4$ ergibt sich durch längere Rechnung

- 2.8 i) $w_{R,c}: \mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $w_{R,c}(a, L_c, x) := S_{R,c}(a, L_c)(x)$,
ist analytisch;
- ii) $S_{R,c}(a, L_c)$ ist für alle $(a, L_c) \in \mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0$ ein analytischer Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^4$ auf $\mathbb{R}^4$;
- iii) $S_{R,c}: \mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0 \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^4)$ ist injektiv;
- iv) $S_{R,c}(\mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0)$ ist eine Untergruppe von $\text{Diff}(\mathbb{R}^4)$;
- v) die durch $S_{R,c}^{-1}: S_{R,c}(\mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0) \longrightarrow \mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0$ von $\text{Diff}(\mathbb{R}^4)$ auf $\mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0$ übertragene Gruppenstruktur ist analytisch und die so definierte Lie-Gruppe $\overline{O(2,3)}_0$ ist eine Überlagerungsgruppe der $O(2,3)_0$;
- vi) $S_{R,c}|_{O(1,3)_0}$ ist ein Homomorphismus von der Lorentzgruppe in die Diffeomorphismengruppe des $\mathbb{R}^4$, $w_{R,c}|_{O(1,3)_0 \times \mathbb{R}^4}$ ist eine Wirkung der Lorentzgruppe auf den $\mathbb{R}^4$.

Die in 2.8v auf $\mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0$ definierte Überlagerungsgruppe $\overline{O(2,3)}_0$ der $(2,3)$ -deSittergruppe nennen wir in Anlehnung an HAWKINS und ELLIS [36] Anti-deSittergruppe; mit der Wirkung $w_{R,c}$ aus 2.8i ist sie eine Lie-Transformationsgruppe des $\mathbb{R}^4$. Nach 2.8vi ist die Lorentzgruppe $O(1,3)_0$ eine gemeinsame Untergruppe der Poincarégruppe und der Anti-deSittergruppe; die Wirkungen dieser Untergruppe auf den $\mathbb{R}^4$ sind aber verschieden, da die Lorentzgruppe als Untergruppe der Poincarégruppe gemäß 2.4 linear wirkt, als Untergruppe der Anti-deSittergruppe aber gemäß 2.5 nicht-linear. Die Wirkung der Anti-deSittergruppe in $O \in \mathbb{R}^4$ ist

$$2.9 \quad S_{R,c}(a, L_c)(0) = S_{R,c}(a)(0) = R\left(\frac{1}{c}a_0, \underline{a}\right) = R(a, L_c)_0(0),$$

wo $(a, L_c)_c(x) := (\frac{1}{c}a_0, \underline{a}) + L_c x$ die Wirkung der Poincarégruppe auf den $\mathbb{R}^4$ ist. Der $\mathbb{R}^4$ ist damit ein homogener Raum sowohl der Poincarégruppe als auch der Anti-deSittergruppe, und die Stabilitätsgruppe des Ursprungs 0 ist für beide Gruppen die Lorentzgruppe.

Es gibt auf dem $\mathbb{R}^4$ bis auf eine multiplikative Konstante nur eine unter der Wirkung der Poincarégruppe invariante pseudo-Riemann'sche Metrik: die Minkowski-Metrik. Auch unter der Wirkung der Anti-deSittergruppe ist bis auf eine multiplikative Konstante nur eine pseudo-Riemann'sche Metrik invariant:

$$2.10 \quad M_{R,c}(t, \underline{x}) := \begin{pmatrix} c^2(1 + \underline{x}^2/R^2) & 0 \\ 0 & -1 + \frac{\underline{x}\underline{x}}{R^2 + \underline{x}^2} \end{pmatrix}.$$

Den $\mathbb{R}^4$ mit der pseudo-Metrik $M_{R,c}$ nennen wir - wieder in Anlehnung an [36; p.131] - Anti-deSitterwelt. Für $R \rightarrow \infty$ geht $M_{R,c}$ in die Minkowski-Metrik über, die Anti-deSitterwelt in die Minkowski-Welt.

Bei gegebener pseudo-Metrik $M_{R,c}$ stellt sich die Frage nach den Isometrien, d.h. nach den Diffeomorphismen, die $M_{R,c}$ invariant lassen. Sei i eine Isometrie, $a := (ci(0)_0, i(0))/R$, $h := S_{R,c}(a)^{-1} \circ i$, $\Rightarrow i = S_{R,c}(a) \circ h$, $h(0) = 0$. Hieraus folgt: $dh(0) \in O(1,3)$, woraus sich ergibt: $h \in S_{R,c}(O(1,3)_0)$ oder $h \in I \circ S_{R,c}(O(1,3)_0)$ mit $I = P$,

$P(t, \underline{x}) := (t, -\underline{x})$, oder $I = T$, $T(t, \underline{x}) := (-t, \underline{x})$, oder $I = P \circ T$. Definieren wir $S_{R,c}(I) := I$, $I = P$, T , PT , und $S_{R,c}(a, IL_c) := S_{R,c}(a) \circ I \circ S_{R,c}(L_c)$, so ist $S_{R,c}$ ein Isomorphismus von der Gruppe der Isometrien von $M_{R,c}$ auf die Gruppe $\overline{O(2,3)}$, deren Einskomponente $O(2,3)_0$ ist und deren Produkt mit den diskreten Symmetrien P , T , und PT wie bei der Poincarégruppe definiert ist.

Wir haben die Anti-deSittergruppe in Abhängigkeit von R und c definiert; verschiedene Werte von R und c liefern die selbe Gruppe, denn die die Anti-deSittergruppe mit $R = c = 1$ definierende Diffeomorphismengruppe wird durch Konjugation mit dem Diffeomorphismus $T_{R,c}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T_{R,c}(t, \underline{x}) := \frac{1}{R}(ct, \underline{x})$, in die durch 2.5 und 2.6 definierte Diffeomorphismengruppe übergeführt. Weiter haben wir:

$$2.11 \quad K: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0 \rightarrow \mathbb{R}^4 \times O(1,3)_0, \quad K(s, a, L_c) := (sa, L_c),$$

ist ein einfacher Kontraktor von der Poincarégruppe auf die Anti-deSittergruppe mit $R = 1$, und (K, J) mit

$$2.12 \quad J: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad J(s, x) := sx,$$

ist ein einfacher Kontraktor der entsprechenden Lie-Transformations=

gruppen; denn $h(st, \sqrt{1+v^2}, \frac{s \underline{v} \cdot \underline{Dx}}{\sqrt{1+s^2 \underline{x}^2}}) = s(\sqrt{1+v^2}t + \underline{v} \cdot \underline{Dx}) + O(s^3)$ und

$$\frac{\eta}{2} - h(\frac{\eta}{2} - st, \sqrt{1+s^2 \underline{a}^2}, \frac{s^2 \underline{a} \cdot \underline{x}}{\sqrt{1+s^2 \underline{x}^2}}) = st + O(s^3).$$

Die Bahnen der Lorentzgruppe im Minkowskiraum werden eindeutig charakterisiert durch den Zahlenwert $c^2 t^2 - \underline{x}^2$, und - falls dieser nicht negativ ist - durch das Vorzeichen von t . Die Bahnen der Lorentzgruppe in der Anti-deSitterwelt werden "lokal" durch die gleichen Größen charakterisiert, dazu kommt aber ein weiterer diskreter Parameter. Genauer: Die Lorentzgruppe läßt in der Anti-deSitterwelt die "Scheiben"

$$2.13 \quad S_{R,c}^k := \left\{ (t, \underline{x}) \in \mathbb{R}^4 \mid \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{R\eta}{c} < t < \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{R\eta}{c} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

invariant, und die Bahnen der Lorentzgruppe in der Scheibe $S_{R,c}^k$ gehen durch eine Verschiebung um $(k \frac{R\eta}{c}, \underline{0})$ aus den Bahnen in der Scheibe $S_{R,c}^0$ hervor.

2.14 Die Bahnen der Lorentzgruppe in der Scheibe $S_{R,c}^k$, $k \in \mathbb{Z}$, der Anti-deSitterwelt sind

$$B_{R,c}^k(r) := \left\{ (t, \underline{x}) \in S_{R,c}^k \mid (R^2 + \underline{x}^2) \sin^2\left(\frac{ct}{R}\right) - \underline{x}^2 = r \right\}, \quad r < 0,$$

$$B_{R,c}^k(0,0) := \left\{ \left(k \frac{R\eta}{c}, \underline{0} \right) \right\}, \quad \text{und}$$

$$B_{R,c}^k(r, \varepsilon) := \left\{ (t, \underline{x}) \in S_{R,c}^k \mid (R^2 + \underline{x}^2) \sin^2\left(\frac{ct}{R}\right) - \underline{x}^2 = r, \right. \\ \left. \text{sign}\left(\sin\left(\frac{ct}{R}\right)\right) = \varepsilon \right\}, \quad r \geq 0, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Die Bahn $B_{R,c}^{k+1/2}$, $k \in \mathbb{Z}$, ist die Ebene $\left\{ (t, \underline{x}) \in \mathbb{R}^4 \mid t = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{R\eta}{c} \right\}$ zwischen den Scheiben $S_{R,c}^k$ und $S_{R,c}^{k+1}$.

Die Parametrisierung der Bahnen in den einzelnen Scheiben haben wir in 2.14 so gewählt, daß sie für $R \rightarrow \infty$ in die Parametrisierung der Bahnen im Minkowskiraum übergeht. In der Anti-deSitterwelt wäre eine Parametrisierung durch

$$2.15 \quad \sqrt{1 + \underline{x}^2/R^2} \cos \frac{ct}{R}$$

naheliegender; in der Scheibe $S_{R,c}^k$ entspricht $\sqrt{1 + \underline{x}^2/R^2} \left| \cos \frac{ct}{R} \right| > 1$: $r < 0$, $\sqrt{1 + \underline{x}^2/R^2} \left| \cos \frac{ct}{R} \right| = 1$: $r = 0$, und $\sqrt{1 + \underline{x}^2/R^2} \left| \cos \frac{ct}{R} \right| < 1$: $r > 0$.

Abbildung 3 zeigt einige Bahnen in der Scheibe $S_{1,1/2}^0$.

2.16

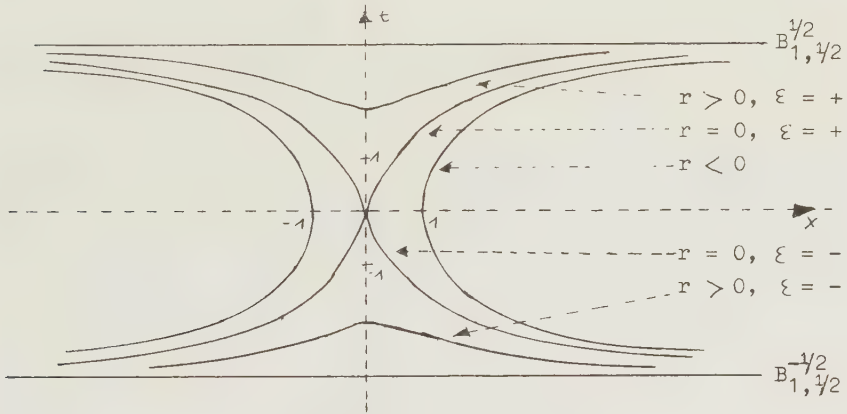


Abb. 3: Bahnen der Lorentzgruppe in der Scheibe $S_{1,1/2}^0$ der Anti-deSitterwelt

Die einzelnen Scheiben der Anti-deSitterwelt ähneln einem auf ein Zeit-Intervall der Dauer $\frac{R\eta}{c}$ zusammengestauchten Minkowskiraum.

Der von der Metrik $M_{R,c}$ erzeugte Krümmungstensor, die Ricci-Krümmung $\mathcal{K}$ und der Krümmungsskalar α sind anti-deSitter-invariant, also die Ricci-Krümmung ein konstantes Vielfaches von $M_{R,c}$ und der Krümmungsskalar eine Konstante. Die Berechnung aus der Metrik 2.10 ergibt für die Ricci-Krümmung

$$2.17 \quad \mathcal{K}(t, \underline{x}) = -\frac{3}{R^2} M_{R,c}(t, \underline{x}),$$

und für den Krümmungsskalar

$$2.18 \quad \alpha(t, \underline{x}) = -\frac{12}{R^2}.$$

Für die Geodäten der Metrik $M_{R,c}$ erhalten wir die Differentialgleichungen

$$2.19 \quad \ddot{\underline{x}} + \frac{1}{R^2} ((1 + \underline{x}^2/R^2) c^2 \dot{t}^2 - \dot{\underline{x}}^2 + \frac{(\underline{x} \cdot \dot{\underline{x}})^2}{R^2 + \underline{x}^2}) \underline{x} = 0,$$

$$\ddot{t} + \frac{2\dot{t}}{R^2 + \underline{x}^2} \underline{x} \cdot \dot{\underline{x}} = 0.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind

2.20 i) zeitartige Geodäten:

$$\underline{x}(\tau) = \sin \tau \underline{a} + \cos \tau \underline{b},$$

$$t(\tau) = t_0 + \frac{R}{c} \left(\frac{\eta}{2} + h \left(\frac{\eta}{2} - h(\tau), \sqrt{1 + \frac{\underline{a}^2 + (\underline{a} \times \underline{b})^2 / R^2}{R^2 + \underline{b}^2}}, 0 \right), \sqrt{1 + \underline{b}^2 / R^2}, s(\tau) \right)$$

mit

$$s(\tau) := \frac{\underline{a} \cdot \underline{b} \sin \tau}{R^2 \sqrt{1 + \underline{b}^2 / R^2 + (\underline{a}^2 / R^2 + (\underline{a} \times \underline{b})^2 / R^4) \sin^2 \tau}};$$

ii) lichtartige Geodäten:

$$\underline{x}(\tau) = \underline{a}\tau + \underline{b},$$

$$t(\tau) = t_0 \pm \frac{R}{c} \arctan \frac{\underline{a}^2 \tau + \underline{a} \cdot \underline{b}}{R \sqrt{\underline{a}^2 + (\underline{a} \times \underline{b})^2 / R^2}};$$

iii) raumartige Geodäten:

$$\underline{x}(\tau) = e^{\tau} \underline{a} + e^{-\tau} \underline{b},$$

$$t(\tau) = t_0 \pm \frac{R}{c} \arctan \frac{((\underline{a} - \underline{b})^2 - R^2) \tanh \tau + \underline{a}^2 - \underline{b}^2}{\sqrt{4 \underline{a}^2 \underline{b}^2 - (R^2 + 2 \underline{a} \cdot \underline{b})^2}}.$$

Die räumlichen Komponenten der zeitartigen Geodäten durchlaufen eine Ellipse um den Ursprung, die zu einem Geradenstück entartet, wenn $\underline{a}$ und $\underline{b}$ linear abhängig sind, und die sich zu einem Punkt zusammenzieht, wenn $\underline{a} = \underline{b} = \underline{0}$. Die lichtartigen Geodäten durchlaufen immer Geraden. Die räumlichen Komponenten der raumartigen Geodäten schließlich durchlaufen Hyperbeln "um den Ursprung", die zu Geraden durch den Ursprung entarten, wenn $\underline{a}$ und $\underline{b}$ linear abhängig sind. Der zeitliche Ablauf ist dabei - wie aus 2.20 ersichtlich - einigermaßen kompliziert. Für die Geodäten durch den Ursprung erhalten wir:

2.21 i) zeitartige Geodäten:

$$\underline{x}(t) = \frac{\sin \frac{ct}{R}}{\sqrt{1 + (\underline{a} \cos \frac{ct}{R})^2 / R^2}} \underline{a},$$

ii) lichtartige Geodäten:

$$\underline{x}(t) = \tan \frac{ct}{R} \underline{a}, \quad \underline{a}^2 = R^2,$$

iii) raumartige Geodäten:

$$\underline{x}(t) = \frac{\sin \frac{ct}{R}}{\sqrt{(\underline{a} \cos \frac{ct}{R})^2 / R^2 - 1}} \underline{a}, \quad \underline{a}^2 > R^2.$$

Abbildung 4 vermittelt einen Eindruck von diesen Geodäten. Es ist zu beachten, daß alle zeitartigen Geodäten periodisch sind mit der Periode $2\frac{R\eta}{c}$. Die Geschwindigkeit im räumlichen Ursprung ist $\frac{c|\underline{a}|}{\sqrt{R^2 + \underline{a}^2}}$, also immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit; für $|\underline{a}| \leq |R|/\sqrt{2}$ ist dies die maximale Geschwindigkeit und es folgt: $v_{\max} \leq c/\sqrt{3}$, für $|\underline{a}| > |R|/\sqrt{2}$ ist die maximale Geschwindigkeit auf zeitartigen Geodäten durch den Ursprung $v_{\max} = \frac{2c}{3\sqrt{3}}(1 + \underline{a}^2/R^2) > c/\sqrt{3}$.

Die raumartigen Geodäten sind jeweils nur für Zeitabschnitte $< \frac{R\eta}{c}$ definiert. Die lichtartigen Geodäten haben Singularitäten in den Abständen $\frac{R\eta}{c}$. Um eine lichtartige Geodäte festzulegen, genügen darum nicht die Anfangswerte von Ort und Geschwindigkeit, sondern es müssen vielmehr Angaben über das Verhalten an den Singularitäten gemacht werden. Will man in der Anti-deSitterwelt weder auf masselose Teilchen noch auf Kausalität verzichten, so kann man dieses Verhalten nicht von Fall zu Fall festlegen, sondern muß über das Verhalten masseloser Teilchen im räumlich Unendlichen globale Annahmen machen. Eine solche Annahme ist totale Absorption; es gibt dann keine freien masselosen Teilchen, weil alle masselosen Teilchen spätestens $\frac{R\eta}{c}$ nach ihrer Erzeugung im räumlich Unendlichen "absorbiert" werden. Eine andere Möglichkeit ist totale Reflexion im räumlich Unendlichen: Läuft ein masseloses Teilchen entlang einer Geodäten nach Unendlich, so soll es nach Erreichen der Singularität einfach zurücklaufen, als ob es reflektiert würde. Diese Annahme liegt der Abbildung 4 im Fall der lichtartigen Geodäte zu Grunde. Wir wollen hier nicht weiter auf die Schwierigkeiten mit masselosen Teilchen in der Anti-deSitterwelt eingehen, insbesondere auf die Frage, ob die Art der Randbedingung experimentell -sei es auch nur ein Gedankenexperiment- entschieden werden kann. Abbildung 5 zeigt den Lichtkegel in den beiden Fällen und den Vorwärtskegel. Im Gegen-

2.22

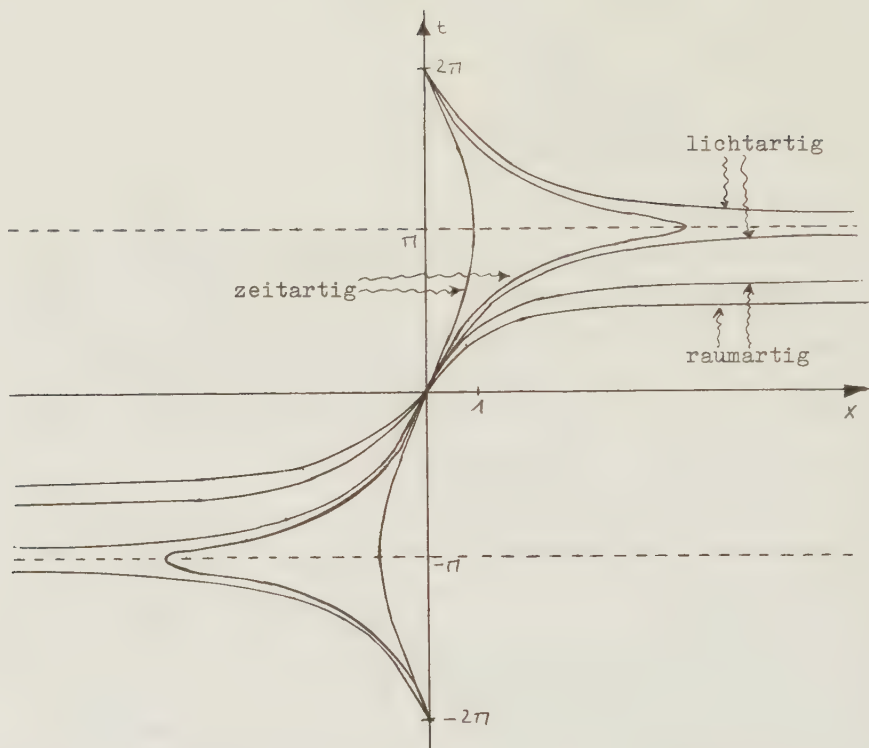


Abb. 4: Geodäten durch den Ursprung mit "totaler Reflexion"
lichtartiger Geodäten im Unendlichen ($R = 1$, $c = 1/2$)

satz zum Minkowskiraum ist nicht jeder Punkt im Vorwärtskegel durch eine Geodäte mit dem Ursprung verbunden. Will man vom Ursprung aus in freiem Fall einen Raumzeit-Punkt im Vorwärtskegel erreichen, so muß man i.a. auf einen geeigneten Zeitraum warten, in dem dies möglich ist (die Länge dieses Zeitraums ist desto kleiner, desto weiter das Ziel entfernt ist).

Der invariante Differentialoperator der Anti-deSitter-Metrik $M_{R,c}$ ist $\square_{R,c}$,

$$2.23 \quad \square_{R,c} := \partial(M_{R,c}(x)^{-1} \partial) = \frac{\partial_0^2}{c^2(1+\underline{x}^2/R^2)} - \frac{\partial^2}{R^2} - \frac{1}{R^2}(\underline{x} \cdot \underline{\partial})^2 - \frac{3}{R^2} \underline{x} \cdot \underline{\partial}.$$

2.24

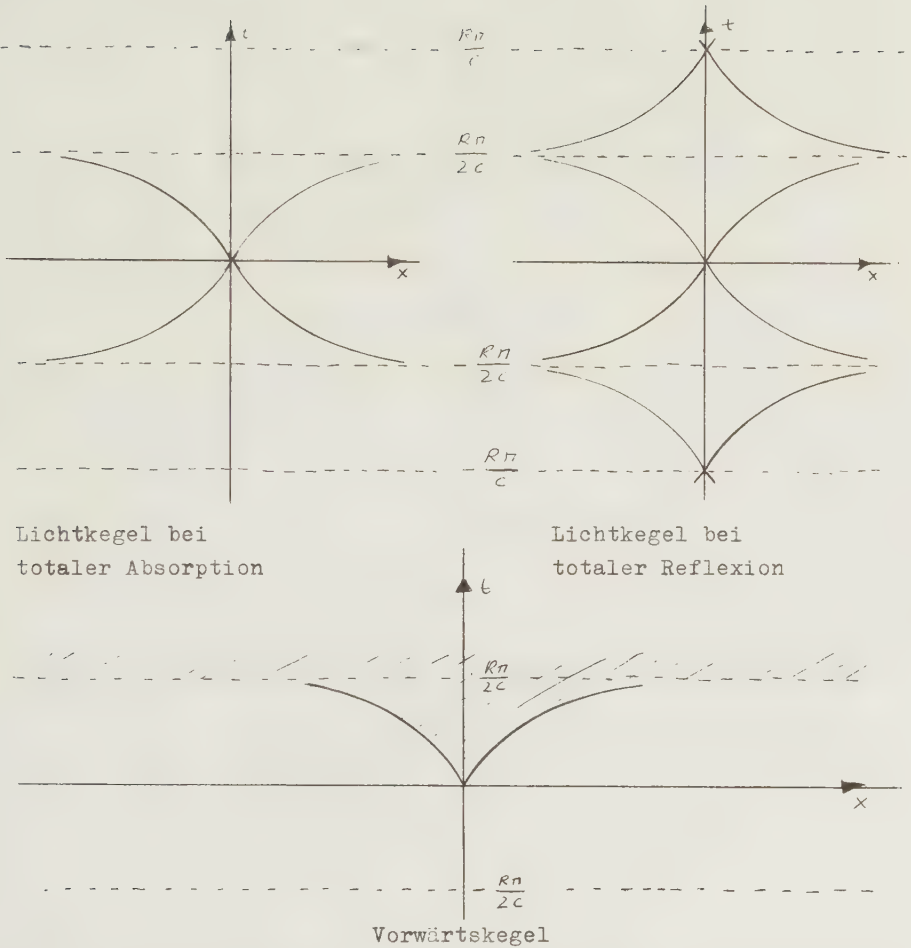


Abb. 5: Lichtkegel bei totaler Absorption und totaler Reflexion im räumlich Unendlichen; Vorwärtskegel

Der Differentialoperator für die charakteristischen Hyperflächen des Differentialoperators $\square_{R,c}$ ist

$$2.25 \quad \partial \phi_{M_{R,c}}(x)^{-1} \partial \phi = \frac{(\partial_0 \phi)^2}{c^2 (1 + \underline{x}^2 / R^2)} - (\underline{\partial} \phi)^2 - \frac{1}{R^2} (\underline{x} \cdot \underline{\partial} \phi)^2 .$$

Sei

$$2.26 \quad \iota_{R,c}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad \iota_{R,c}(x) := (\sqrt{1+x^2/R^2} \sin \frac{c}{R} x_0, \underline{x}, \sqrt{1+x^2/R^2} \cos \frac{c}{R} x_0).$$

Dann gilt mit $x \underline{M}_{R,c} y := c^2 x_0 y_0 + R^2 x_4 y_4 - \underline{x} \cdot \underline{y}$:

$$2.27 \quad i) \quad \iota_{R,c}(x) \underline{M}_{R,c} \iota_{R,c}(x) = R^2,$$

$$ii) \quad \iota_{R,c}(S_{R,c}(a, L_c)(x)) = S_{R,c}(a, L_c) \iota_{R,c}(x) \quad \text{mit}$$

$$iii) \quad S_{R,c}(a) := \begin{bmatrix} \cos a_0 & 0 & \frac{R}{c} \sin a_0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ -\frac{c}{R} \sin a_0 & 0 & \cos a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi + \frac{\underline{a} \underline{a}}{1 + \sqrt{1 + \underline{a}^2}} & \frac{R \underline{a}}{\sqrt{1 + \underline{a}^2}} \\ 0 & \frac{\underline{a}}{R} & \sqrt{1 + \underline{a}^2} \end{bmatrix}$$

$$S_{R,c}(L_c) := \begin{bmatrix} L_c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{R,c}(a, L_c) := S_{R,c}(a) S_{R,c}(L_c) \in O(\underline{M}_{R,c}),$$

und

$$2.28 \quad i) \quad \partial p \iota_{R,c}(x) \underline{M}_{R,c} (x)^{-1} \partial p \iota_{R,c}(x) = p \underline{M}_{R,c}^{-1} p - \frac{1}{R^2} (p \iota_{R,c}(x))^2,$$

$$ii) \quad \square_{R,c} p \iota_{R,c}(x) = -\frac{4}{R^2} p \iota_{R,c}(x), \quad p \in \mathbb{R}^5.$$

Damit erhalten wir für $p \underline{M}_{R,c}^{-1} p \geq 0$ Lösungen von 2.25:

$$2.29 \quad i) \quad \text{Kugelwellen: } p_0^2/c^2 + p_4^2/R^2 - p^2 > 0,$$

$$p \iota_{R,c}(x) = \pm R \sqrt{p_0^2/c^2 + p_4^2/R^2 - p^2};$$

$$ii) \quad \text{ebene Wellen: } p_0^2/c^2 + p_4^2/R^2 - p^2 = 0,$$

$$p \iota_{R,c}(x) = 0.$$

Abbildung 6 veranschaulicht die sich aus 2.29 ergebenden Wellenfronten. Für Kugelwellen um $\underline{x} = \underline{0}$ sind die Wellenfronten Sphären, deren Radius r mit dem Tangens der Zeit von $r = 0$ für $t = 0$ bis $r = \infty$ für $t = \frac{R\eta}{2c}$ anwächst; die Wellenfronten von Kugelwellen um $\underline{x} = \underline{a} \neq \underline{0}$ sind von $t = -\frac{R}{c} \arctan |\underline{a}|/R$ bis $t = \frac{R\eta}{2c} - 2\frac{R}{c} \arctan |\underline{a}|/R$ Ellipsoide, zur Zeit $t = \frac{R\eta}{2c} - 2\frac{R}{c} \arctan |\underline{a}|/R$ ein Paraboloid, von $t = \frac{R\eta}{2c} - 2\frac{R}{c} \arctan |\underline{a}|/R$ bis $t = \frac{R\eta}{2c} - \frac{R}{c} \arctan |\underline{a}|/R$ nach hinten geöffnete Hyperboloide, zur Zeit $t = \frac{R\eta}{2c} - \frac{R}{c} \arctan |\underline{a}|/R$ eine Ebene, und von $t = \frac{R\eta}{2c} - \frac{R}{c} \arctan |\underline{a}|/R$ bis $t = \frac{R\eta}{c} - \frac{R}{c} \arctan |\underline{a}|/R$ nach vorn geöffnete

Hyperboloide. Die Wellenfronten ebener Wellen schließlich sind von $t = -\frac{R\eta}{2c}$ bis $t = 0$ nach hinten geöffnete Hyperboloide, die zur Zeit $t = 0$ über eine Ebene nach Vorne klappen, und von $t = 0$ bis $t = \frac{R\eta}{2c}$ nach vorne geöffnete Hyperboloide. (Wir haben dabei den Zeitablauf immer so gewählt, daß für $t = 0$ der Punkt $\underline{x} = \underline{0}$ in der Wellenfront liegt, und die Wellen auslaufende Wellen sind.) Die Bahnen masseloser Teilchen sind von der Quelle ausgehende Geraden, deren Zeitentwicklung mit der der Wellenfront übereinstimmt. (Im Fall von ebenen Wellen handelt es sich um ein Parallelen-Bündel.)

2.30

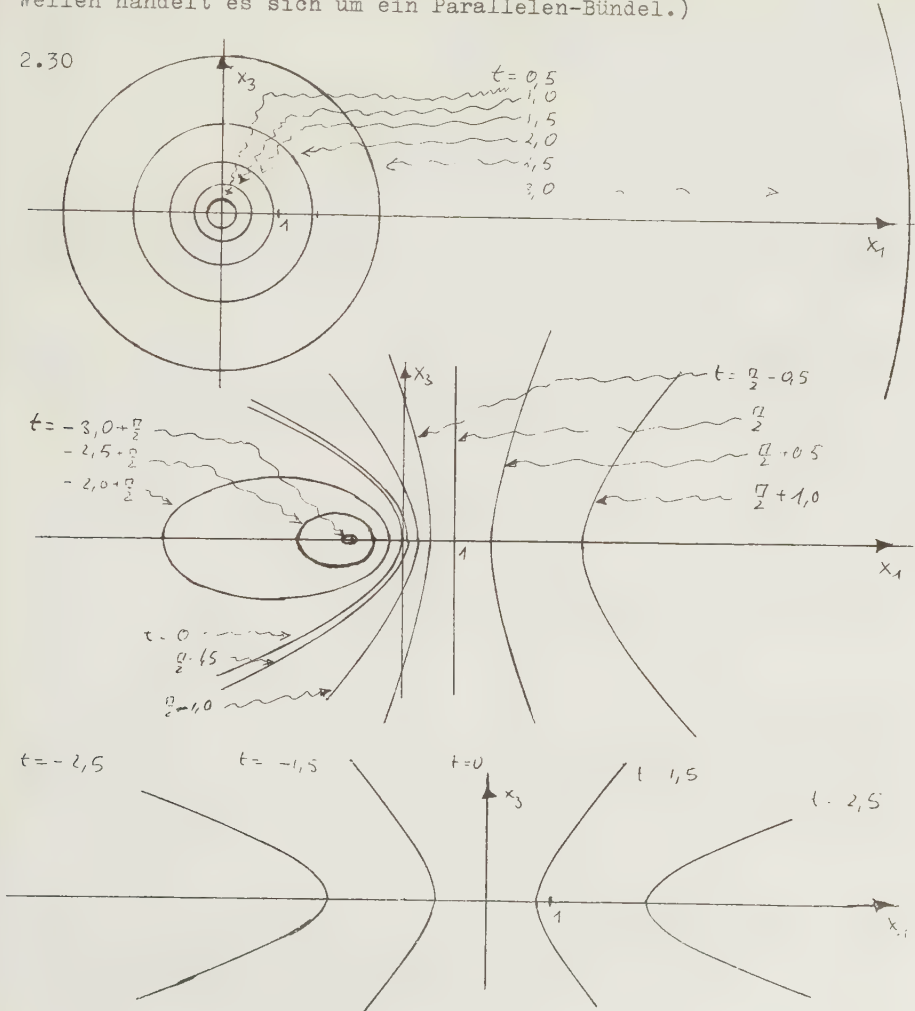


Abb. 6: Wellenfronten in der Anti-deSitterwelt ($R = 1, c = 1/2$)

Nach [36;p.133] gibt es in der Anti-deSitterwelt keine Cauchy-Hyperflächen. Cauchy-Daten auf einer Hyperebene $t = \text{const.}$ bestimmen eine Lösung von $\square_{R,c} f = 0$ nur in dem in Abbildung 7 skizzierten Gebiet. Der Grund hierfür ist, daß die Vektordarstellung $U_{R,c}$ der Anti-deSittergruppe auf $L_2(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$,

$$2.31 \quad (U_{R,c}(a, L_c)f)(x) := f(S_{R,c}(a, L_c)^{-1}(x)) ,$$

nicht nur nach den Eigenwerten des Casimiroperators $E^2 - \underline{P}^2 - \underline{K}^2 + \underline{J}^2$,

$$2.32 \quad E = R \frac{1}{c} \partial_0 , \quad \underline{J} = \underline{x} \times (-i \underline{\partial}) ,$$

$$\underline{P} = R \cos \frac{c}{R} x_0 (-i \underline{\partial}) + R \sin \frac{c}{R} x_0 \frac{\underline{x}}{R \sqrt{1 + \underline{x}^2/R^2}} \frac{1}{c} \partial_0 ,$$

$$\underline{K} = -R \sin \frac{c}{R} x_0 (-i \underline{\partial}) + R \cos \frac{c}{R} x_0 \frac{\underline{x}}{R \sqrt{1 + \underline{x}^2/R^2}} \frac{1}{c} \partial_0 ,$$

zerlegt werden kann, sondern auch nach den Eigenwerten von $e^{i2\pi E}$ (der Casimiroperator $(\underline{J} \cdot \underline{P})^2 + (\underline{J} \cdot \underline{K})^2 - (E \underline{J} - \underline{K} \times \underline{P})^2$ ist für $U_{R,c}$ identisch 0); für $U_{R,c}$ gilt: $E^2 - \underline{P}^2 - \underline{K}^2 + \underline{J}^2 = -R^2 \square_{R,c}$.

Insbesondere gilt: ist f periodisch bis auf den Faktor w mit der Periode $(2\frac{R\eta}{c}, 0)$, so auch $f \circ S_{R,c}(a, L_c)^{-1}$, d.h. $f(x_0 + 2\frac{R\eta}{c}, \underline{x}) = wf(x_0, \underline{x})$
 $\Rightarrow f(S_{R,c}(a, L_c)^{-1}(x_0 + 2\frac{R\eta}{c}, \underline{x})) = wf(S_{R,c}(a, L_c)^{-1}(x_0, \underline{x}))$.

Sei

$$2.33 \quad H_w := \left\{ [f] : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(x_0 + 2\frac{R\eta}{c}, \underline{x}) = wf(x_0, \underline{x}) \text{ und} \right. \\ \left. \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_0^{2\frac{R\eta}{c}} dx_0 |f(x_0, \underline{x})|^2 < \infty \right\} ,$$

$$\langle f, g \rangle_w := \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_0^{2\frac{R\eta}{c}} dx_0 f(x_0, \underline{x}) \overline{g(x_0, \underline{x})} ;$$

dann ist

$$2.34 \quad Z : L_2(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{A}_1} dw H_w ,$$

$$(Zf)_w(x_0, \underline{x}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} w^{-k} f(x_0 + 2k\frac{R\eta}{c}, \underline{x}) ,$$

ein Isomorphismus, und Z^{-1} ist durch

$$2.35 \quad (Z^{-1}f)(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{A}_1} dw f_w(x)$$

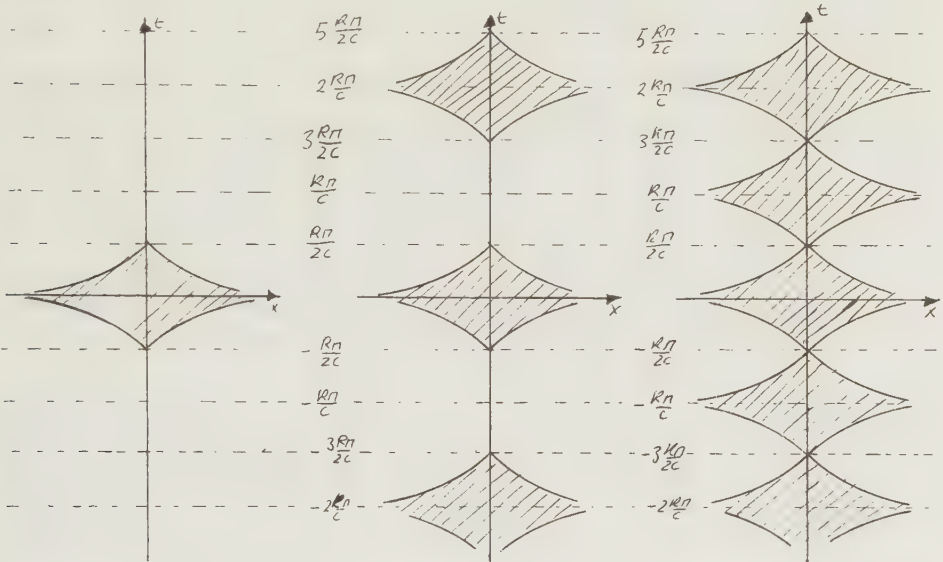
gegeben. Die Hilberträume H_w sind unter der Wirkung der Anti-deSittergruppe invariant und die Darstellung $U_{R,c,w}$ der Anti-deSittergruppe auf H_w ,

$$2.36 \quad (U_{R,c,w}(a, L_c)f)(x) := f(S_{R,c}(a, L_c)^{-1}(x)) ,$$

ist unitär, weil $\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_0^{\frac{R\eta}{c}} dx_0 f(x) \overline{g(x)} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{t(x)}^{t(x)+2\frac{k\eta}{c}} dx_0 f(x) \overline{g(x)}$
 für f und g aus H_w .
 Hiermit folgt:

$$2.37 \quad U_{R,c} = Z^{-1} \oplus \bigoplus_{\mathbb{Z}} dw U_{R,c,w} Z$$

2.38



Daten für $t = 0$

Daten für $t = 2k\frac{R\eta}{c}$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Daten für $t = k\frac{R\eta}{c}$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Abb. 7: Gebiete, in denen eine Lösung von $\square_{R,c} f = 0$ durch ihre Cauchy-Daten festgelegt ist (schraffiert).

Nehmen wir nun an, daß das Spektrum von $\square_{R,c}|_{H_w}$ unabhängig von w ist, so müssen zumindest die Cauchy-Daten für alle f_w gegeben sein, oder äquivalent: die Cauchy-Daten nicht nur für $t = x_0$, sondern auch für $t = 2k\frac{R\eta}{c} + x_0$, $k \in \mathbb{Z}$. Diese Hyperflächen können wir auch invariant schreiben:

$$2.39 \quad C_1(p) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid p|_{R,c}(x) = 0\}, \quad p|_{R,c}^{-1}p > 0;$$

$C_2(p,x) :=$ die Teilmenge von $C_1(p)$, die durch Streichung jeder zweiten Hyperfläche entsteht, und die x enthält.

Abbildung 7 zeigt, in welchem Gebiet eine Lösung von $\square_{R,c} f = 0$ durch Cauchy-Daten auf $C_1(p)$ bzw. $C_2(p,x)$ festgelegt ist. Für die

Elemente von H_w könnte man erwarten, daß eine Lösung von $\square_{R,c} f = kf$ durch ihre Werte auf $C_2(p, x)$ festgelegt ist. Das ist aber nicht der Fall, denn sei $C_2(p, x) := \{(2k \frac{R\eta}{c}, x) \mid k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}^3\}$; dann ist mit f auch $f + \tilde{\varphi}_\xi$,

$$2.40 \quad \tilde{\varphi}_\xi(x) := \varphi_\xi(\frac{c}{R}x_0 - \arcsin \frac{\underline{n} \cdot x}{R\sqrt{1+x^2/R^2}} - \eta), \quad |\underline{n}| = 1, \\ \text{Träger } \varphi_\xi \subseteq [-\xi, \xi], \quad \xi > 0,$$

eine Lösung, und $(f + \tilde{\varphi}_\xi)|_{C_2(p, x)} = f|_{C_2(p, x)}$ für $\xi < \frac{\eta}{4}$. Den Grund hierfür kann man darin sehen, daß es für einige Werte von q für $s = 0$ nicht nur zwei inäquivalente irreduzible Darstellungen der

$\overline{O(2,3)}_0$ mit $w = e^{iq}$, $P_1 = 0$, $R = q(q-3)$ gibt, wie EHRMAN [41] behauptet, sondern vier [42]. Damit werden mehr Daten nötig; man kann hoffen, daß die Cauchy-Daten auf $C_1(p)$ ausreichen, denn im Gegensatz zu $C_2(p, x)$ gibt es keine licht-artigen Geodäten, die $C_1(p)$ nicht schneiden oder "berühren". Wir fassen zusammen in der

$$2.41 \text{ Vermutung: } f \in C^2(\mathbb{R}^4), \square_{R,c} f = kf, f, \partial_0 f|_{C_1(p)} = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Um diese Vermutung zu beweisen, muß man die Darstellungen $U_{R,c}$ bzw. $U_{R,c,w}$ vollständig ausreduzieren.

Im Minkowski-Raum legen Cauchy-Daten auf einer beliebigen raum-artigen Hyperebene eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung $\square_c f = kf$ fest; diese Tatsache wird als Determinismus der relativistischen Felder angesehen: Ein Klein-Gordon-Feld f ist für alle Zeiten durch die Werte von f und $\partial_0 f$ zu einem Zeitpunkt festgelegt. Die Rolle der Cauchy-Daten wird dabei unverändert von der nicht-relativistischen in die relativistische Feldtheorie übernommen. Während aber in der nicht-relativistischen Theorie f und $\partial_0 f$ zu einer festen Zeit Meßdaten sind, ist das in der relativistischen Theorie nicht der Fall: keinem Beobachter ist es möglich, f und $\partial_0 f$ auf einer raum-artigen Hyperebene zu messen. Meßdaten kann ein Beobachter im Minkowski-Raum immer nur aus dem Rückwärts-Lichtkegel empfangen, und das Feld f ist durch seine Werte im Rückwärts-Lichtkegel nicht festgelegt. Denn zu jedem Rückwärts-Lichtkegel gibt es eine lichtartige Gerade, die ihn nicht schneidet oder berührt, was bedeutet, daß ein Beobachter im Minkowski-Raum zu jedem Zeitpunkt von einer unvorhersehbaren "Schockwelle" getroffen werden kann.

Die Cauchy-Daten, die eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

festlegen, sind also bereits in der relativistischen Theorie nicht unmittelbar der Erfahrung zugänglich. Damit ist auch der Zusammenhang des Cauchy-Problems mit der Kausalität nur ein indirekter. Man kann darum hoffen, durch eine Modifikation des Cauchy-Problems derart, daß man f und $\partial_0 f$ nicht nur auf einer Hyperfläche, sondern auf einer ganzen Schar $C_1(p)$ von Hyperflächen angibt, zu einem der Anti-deSitter-Welt adäquaten Kausalitäts-Begriff für Felder zu gelangen.

Die Mikro-Kausalitäts-Bedingung für Quantenfelder kann man ohne weiteres in die Anti-DeSitter-Welt übertragen: zwei Feldoperatoren $\psi(f)$ und $\phi(g)$ heißen mikro-kausal, wenn sie für Funktionen f und g , deren Träger zueinander raumartig sind, vertauschen bzw. anti-vertauschen. Dabei sind zwei Punkte x und y in der Anti-deSitter-Welt raumartig, wenn

$$2.42 \quad x \times y : \Leftrightarrow |x_0 - y_0| < \frac{R\pi}{2c} \quad \text{und} \\ \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{R^2}} \cos \frac{c}{R}(x_0 - y_0) - \frac{x \cdot y}{R^2} > 1 .$$

Diese Bedingungen sind äquivalent zu $|S_{R,c}(\frac{c}{R}y_0, y/R)^{-1}(x)_0| < \frac{R\pi}{2c}$ und $\sqrt{1 + S_{R,c}(\frac{c}{R}y_0, y/R)^{-1}(x)^2/R^2} \cos \frac{c}{R} S_{R,c}(\frac{c}{R}y_0, y/R)^{-1}(x)_0 > 1$, so daß die Definition von raumartig anti-deSitter-invariant ist.

Kapitel 6: Kontraktion der Darstellungen der Poincarégruppe zu Darstellungen der Galileigruppe.

In diesem Kapitel werden die irreduziblen Darstellungen der Poincarégruppe zu Darstellungen der Galileigruppe kontrahiert, darüber hinaus aber auch Theorien mit direkter Wechselwirkung [25] entsprechende Darstellungen der Poincarégruppe [26]. Für die Kontraktion der irreduziblen Darstellungen haben INÖNÜ und WIGNER [5] den Weg gewiesen; das von ihnen für die Poincaréalgebra angegebene Verfahren übertragen wir auf der Basis von Kapitel 4 auf die Poincarégruppe. Wir legen dabei besonderes Gewicht auf die physikalische Interpretation des Verfahrens und kontrahieren auch Darstellungen zur Masse 0 und mit von 0 verschiedenem Spin. Zur Klassifizierung der Darstellungen der Galileigruppe sei auf [27], [28], [29] und besonders auf den Übersichtsartikel von LÉVY-LEBLOND [30] verwiesen.

§1 Relativistische und nicht-relativistische Teilchen der Masse $m > 0$

Sowohl die relativistischen als auch die nicht-relativistischen Teilchen charakterisiert man durch ihre Masse und ihren "inneren" Drehimpuls, den Spin. Dieser Charakterisierung entspricht eine Beschreibung durch irreduzible Darstellungen der Poincarégruppe (siehe 4.4.2) bzw. der Galileigruppe (siehe 4.4.3 iv). Wir wollen jetzt die Vorgänge beschreiben, die sich bei der Kontraktion der Darstellungen (siehe 4.4.3) in der universellen Einhüllenden der Lie-Algebra der Poincarégruppe abspielen. Unser Ziel ist dabei in erster Linie physikalische Einsicht; denn die Mathematik wurde bereits in 4§4 behandelt.

Vorgänge, bei denen Multiplikator-darstellungen von Gruppen eine Rolle spielen, lassen sich vorteilhaft durch Vektordarstellungen einer zentralen Erweiterung dieser Gruppen beschreiben. Hier sind das gerade die in 2.4.5 definierten Erweiterungen $ZIO(1,3)_0$ der $IO(1,3)_0$ und $ZIIIO(3)_G$ der $IIIO(3)_G$. In den Lie-Algebren $zio(1,3)$ und $ziio(3)_G$ dieser Erweiterungen führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

Drehimpuls:	<u>J</u>	die Erzeugenden der <u>Drehungen</u> um drei orthogonale Achsen
Boost	: <u>K</u>	die Erzeugenden der <u>Lorentz-</u> (bzw. <u>Galilei-</u>) Transformationen entlang der drei Achsen
Impuls	: <u>P</u>	die Erzeugenden der <u>Verschiebungen</u> entlang der drei Achsen

Energie : E die Erzeugende der Zeitverschiebung
 Masse : M die Erzeugende der zentralen Erweiterung

Damit sind die Vertauschungsrelationen für die erweiterte

1.1 Poincaréalgebra

Galileialgebra

$$\begin{aligned}
 [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{n} \cdot \underline{J}] &= \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J} \\
 [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{n} \cdot \underline{K}] &= \underline{m} \wedge \underline{n} \cdot \underline{K} \\
 [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{n} \cdot \underline{P}] &= \underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{P} \\
 [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{E}] &= 0 \\
 [\underline{m} \cdot \underline{J}, \underline{M}] &= 0 \\
 [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{n} \cdot \underline{K}] &= -\underline{m} \times \underline{n} \cdot \underline{J} \\
 [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{n} \cdot \underline{P}] &= \underline{m} \cdot \underline{n} (E + M) \\
 [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{n} \cdot \underline{K}] &= 0 \\
 [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{n} \cdot \underline{P}] &= \underline{m} \cdot \underline{n} M \\
 [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{E}] &= \underline{m} \cdot \underline{P} \\
 [\underline{m} \cdot \underline{K}, \underline{M}] &= 0 \\
 [\underline{m} \cdot \underline{P}, \underline{n} \cdot \underline{P}] &= 0 \\
 [\underline{m} \cdot \underline{P}, \underline{E}] &= 0 \\
 [\underline{m} \cdot \underline{P}, \underline{M}] &= 0 \\
 [\underline{E}, \underline{M}] &= 0
 \end{aligned}$$

(Lichtgeschwindigkeit $c = 1$, $\underline{m}, \underline{n} \in \mathbb{R}^3$)

Die folgenden Elemente bilden ein minimales Erzeugendensystem für das Zentrum der universellen Einhüllenden der erweiterten

1.2 Poincaréalgebra

Galileialgebra

$$\begin{aligned}
 -(E+M)^2 + \underline{P}^2 & \quad -2ME + \underline{P}^2 \\
 ((E+M)\underline{J} + \underline{K} \times \underline{P})^2 - (\underline{P} \cdot \underline{J})^2 & \quad (M\underline{J} + \underline{K} \times \underline{P})^2 \\
 M & \quad M
 \end{aligned}$$

Bei den hier betrachteten Darstellungen 4§4.2 bzw. 4§4.3 iv sind $-(E+M)^2 + \underline{P}^2$ und $-iM$ positive Operatoren; damit sind die folgenden Operatoren für diese Darstellungen definiert:

$$\sqrt{-(E+M)^2 + \underline{P}^2} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{M^2}((E+M)\underline{J} + \underline{K} \times \underline{P})^2 + \frac{1}{M^2}(\underline{P} \cdot \underline{J})^2, \quad -iE + \frac{1}{2M^2} \dots$$

$-(\underline{J} + \frac{1}{E} \underline{K} \times \underline{P})^2$. Im folgenden wollen wir bei Darstellungen - wie all-

gemein üblich - von den schief-selbstadjungierten Erzeugenden zu selbstadjungierten Operatoren übergehen, und zwar

$$1.3 \quad \underline{J} \mapsto -i\underline{J}, \underline{K} \mapsto -i\underline{K}, \underline{P} \mapsto i\underline{P}, \underline{E} \mapsto -i\underline{E}, \underline{M} \mapsto -i\underline{M},$$

wobei wir für die so definierten Operatoren die alten Bezeichnungen beibehalten.

Bei der Kontraktion durchlaufen wir eine Folge von Lie-Algebren mit der Lie-Struktur $[X, Y]_s := k_s^{-1} [k_s X, k_s Y]$; ist das Polynom

$C(X_1 \dots X_n)$ zentral in der universellen Einhüllenden bezüglich $[\cdot, \cdot]$, so ist darum $C(k_s^{-1} X_1 \dots k_s^{-1} X_n)$ zentral in der universellen Einhüllenden bezüglich $[\cdot, \cdot]_s$. Aus 1.2 erhalten wir so die von der Lichtgeschwindigkeit $1/s$ abhängigen Casimir-Operatoren der erweiterten

1.4	Poincaréalgebra	Galileialgebra
freie Masse	: M	M
innere Masse	: $\sqrt{(M+s^2 E)^2 - s^2 P^2} - M$	0
Masse	: $\sqrt{(M+s^2 E)^2 - s^2 P^2}$	M
freie Energie	: M/s^2	-
innere Energie	: $(\frac{1}{s})^2 (\sqrt{(M+s^2 E)^2 - s^2 P^2} - M)$	$E - \frac{1}{2M} P^2$
Ruheenergie	: $(\frac{1}{s})^2 \sqrt{(M+s^2 E)^2 - s^2 P^2}$	-
Spin	: $\frac{(\underline{J} + \underline{K} \times \underline{P})^2 - s^2 (\underline{P} \cdot \underline{J})^2}{(M+s^2 E)^2 - s^2 P^2}$	$(\underline{J} + \frac{1}{M} \underline{K} \times \underline{P})^2$

Dabei ergibt sich die freie Masse M als Erzeugende der zentralen Erweiterung, der im relativistischen Fall die freie Energie M/s^2 zugeordnet ist (die nicht-relativistisch nicht existiert). Die Masse ergibt sich im relativistischen Fall in üblicher Weise zu

$\sqrt{(M+s^2 E)^2 - s^2 P^2}$ und die Ruheenergie zu $\sqrt{(M+s^2 E)^2 - s^2 P^2}/s^2$, während die Masse nicht-relativistisch gleich der freien Masse M ist und eine Ruheenergie nicht existiert. Die innere Energie ist relevant für die Beschreibung von Systemen nicht-relativistischer Teilchen, und der entsprechende relativistische Ausdruck ist so gewählt, daß er für $s \rightarrow 0$ den nicht-relativistischen Ausdruck ergibt; der relativistischen inneren Energie ist die innere Masse zugeordnet, die für $s \rightarrow 0$ in die nicht-relativistische innere Masse 0 übergeht.

Die drei Parameter freie Masse, innere Energie und Spin charakterisieren gerade die folgenden irreduziblen Darstellungen der in 2.4.5 definierten zentralen Erweiterung $ZIIO(3)_G$ der Galileigruppe:

$$1.5 \quad ([m|e, j](r, a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(\underline{p}) := \\ = e^{irm} + ia_0(\underline{p}^2/2m + e) - i\underline{a} \cdot \underline{p} D^{(j)}(U) f(D(U)^{-1}(\underline{p} - m\underline{v})) , \\ f \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{2j+1}), m > 0, e \in \mathbb{R}, j \in \frac{1}{2}\mathbb{N} .$$

Die Interpretation von m als freier Masse, e als innerer Energie und j als Spin eines nicht-relativistischen Teilchens ist in [28] näher ausgeführt. Man beachte, daß $[m|e, j]$ die gleiche Strahldarstellung der Galileigruppe erzeugt wie $[m|0, j]$, was der mathematische Ausdruck dafür ist, daß bei nicht-relativistischen Prozessen die Energieskala beliebig verschoben werden kann.

Ebenso wie die Darstellungen der $ZIIO(3)_G$ können wir nun die Darstellungen der in 2§4.5 definierten trivialen Erweiterung $ZIO(1,3)_0$ der Poincarégruppe durch freie Masse, innere Energie und Spin charakterisieren:

$$1.6 \quad ([m|e, j]_S(r, a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(\underline{p}) := \\ = e^{irm} + ia_0(\sqrt{(m+s^2e)^2 + s^2\underline{p}^2} - m)/s^2 - i\underline{a} \cdot \underline{p} \sqrt{1 + s^2\underline{v}^2} - \frac{s^2\underline{v} \cdot \underline{p}}{\sqrt{(m+s^2e)^2 + s^2\underline{p}^2}} \\ D^{(j)}(Q_S(s\underline{p}, s\underline{v})U) f(D(U)^{-1}(\underline{p} + (-\sqrt{(m+s^2e)^2 + s^2\underline{p}^2} + \frac{s^2\underline{v} \cdot \underline{p}}{1 + \sqrt{1 + s^2\underline{v}^2}})\underline{v})) \\ f \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{2j+1}), m > 0, e \geq 0 \text{ oder } |s| < \sqrt{\frac{m}{e}}, j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}, \text{ und} \\ Q_S \text{ wie } Q \text{ in 4.4.2 viii mit } m+s^2e \text{ statt } m.$$

Man beachte, daß $[m|e, j]_S$ die selbe Strahldarstellung der Poincarégruppe erzeugt wie $[m+s^2e|0, j]_S$.

Für die Erzeugenden der Lie-Algebren gilt bei der Darstellung $[m|e, j]_S$ bzw. $[m|e, j]$:

1.7	Poincaréalgebra	Galileialgebra
Drehimpuls:	$i\underline{p} \times \underline{\partial} + \underline{S}$	$i\underline{p} \times \underline{\partial} + \underline{S}$
Boost :	$\frac{is^2}{2\sqrt{(m+s^2e)^2 + s^2\underline{p}^2}} \underline{p} - \frac{s^2}{m+s^2e + \sqrt{(m+s^2e)^2 + s^2\underline{p}^2}} \underline{p} \times \underline{S} + i\sqrt{(m+s^2e)^2 + s^2\underline{p}^2} \underline{\partial}$	$\text{im } \underline{\partial}$
Impuls :	$\underline{p}$	$\underline{p}$

$$\begin{array}{ll} \text{Energie} & : (\sqrt{(m+s^2 e) + s^2 \underline{p}^2} - m)/s^2 \quad e + \underline{p}^2/2m \\ \text{Masse} & : m \quad m \end{array}$$

Dabei sind $\underline{S}$ die Erzeugenden der Drehgruppendarstellung $D^{(j)}$.

Für die Invarianten 1.4 erhalten wir

1.8	Poincaréalgebra	Galileialgebra
freie Masse	: m	m
Masse	: $m+s^2 e$	m
innere Energie:	e	e
Spin	: $j(j+1)$	$j(j+1)$

Wir haben die Abhängigkeit der $[m|e, j]_s$ von s so gewählt, daß $[m|e, j]_s$ eine Deformation von $[m|e, j]$ ist, und zwar mit dem in 4.4.3 angegebenen Analytizitätsbereich; aber diese Deformation ist nur dann auch eine Kontraktion, wenn die Masse gleich der freien Masse ist und die Ruheenergie gleich der freien Energie, also die innere Energie gleich 0 ist. In diesem Fall gilt die Einstein'sche Massen-Energie Beziehung $E_0 = mc^2$ als Relation zwischen freier Masse und der Ruheenergie; als Relation zwischen Masse und Ruheenergie liegt sie freilich gemäß 1.4 immer vor.

Für das Tensor-Produkt zweier irreduzibler Darstellungen gilt:

$$\begin{aligned} 1.9 \quad [m_1|e_1, j_1]_s \otimes [m_2|e_2, j_2]_s &\cong \\ &\cong \bigcup_{[e_1+e_2, \infty[} \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{\substack{j_1+j_2 \\ d=|j_1-j_2|}}^{j_1+j_2} \bigoplus_{j=|l-d|}^{l+d} [m_1+m_2|e, j]_s . \end{aligned}$$

Diese Zerlegung findet man für $s \neq 0$ - natürlich in einer anderen Form - bei WIGHTMAN [31] und für $s = 0$ bei LÉVY-LEBLOND [28]. Damit ist die Deformation einer beliebigen Darstellung der Galileigruppe mit nicht-trivialem Multiplikator zu einer Darstellung der Poincarégruppe im wesentlichen unabhängig davon, ob sie über ein direktes Integral oder gegebenenfalls als Tensor-Produkt definiert wird.

§2 Relativistische Tachyonen und nicht-relativistische Wellenfelder

INÖNÜ und WIGNER [5] haben eine Kontraktion der Darstellungen der Poincarégruppe mit negativem Vierer-Impulsquadrat auf Darstellungen der Galileigruppe angegeben, allerdings nur in der Algebra der Darstellungen. Wir wollen diese Kontraktion auf die Darstellungen der Gruppen selbst übertragen und dabei einen "diskreten" Spin zulassen; solch eine irreduzible Darstellung der Poincarégruppe bezeichnen wir als Tachyon.

Bevor wir die Kontraktion durchführen, wollen wir die dabei relevanten Darstellungen der Galileigruppe behandeln. Diese haben die Form:

$$2.1 \quad ([0(p, j](a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(e, \underline{p}) := e^{ij\chi(\underline{p}, U) + iea_0 - i\underline{p} \cdot \underline{a}} f(e - \underline{p} \cdot \underline{v}, D(U)^{-1}\underline{p}),$$

$$f \in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C}), \quad p > 0, \quad j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

wobei $e^{ij\chi}$ durch

$$2.2 \quad e^{ij\chi(\underline{p}, U)} := (e^{i\chi(\underline{p}, U)/2})^{2j},$$

$$\begin{bmatrix} e^{i\chi(\underline{p}, U)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\chi(\underline{p}, U)/2} \end{bmatrix} := U_{\underline{p}}^{-1} U U_{D(U)},$$

mit

$$2.3 \quad U_{\underline{p}} \in SU(2), \quad U_{\underline{p}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{\underline{p}}^+ = \pi + \underline{p} \cdot \underline{\phi}/|\underline{p}|; \text{ die spezielle Wahl}$$

der $U_{\underline{p}}$ ist dabei bedeutungslos.

Interpretieren wir p als die Wellenzahl, $|j|$ als den Spin, $\underline{p}$ als den Wellenzahlvektor = Wellenzahl mal Normale der Wellenfront und e als die Frequenz [37], so erhalten wir die nicht-relativistische Beschreibung der Wellenausbreitung, wie sie in Lehrbüchern der Elementarphysik (vgl. z.B. [32; § 78]) zu finden ist: Der nicht-relativistische Dopplereffekt ändert die Wellenzahl nicht, die Frequenz e aber zu $e - \underline{p} \cdot \underline{v}$. Für $j \neq 0$ ist $\text{sign}(j)$ die Helizität der Welle; $j = 0$ entspricht akustischen Wellen, $j = 1/2$ Spinwellen, $j = 1$ elektromagnetischen Wellen.

Für viele Anwendungen ist es zweckmäßig, den ziemlich komplizier-

ten Faktor $e^{ij\lambda}$ in 2.1 durch ein "Spinor-Transformationsverhalten", d.h. eine Matrix $D^{(j)}$, zu ersetzen. Dazu bildet man zunächst den $L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C})$ in den $L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C}^{2|j|+1})$ ab, $f \mapsto fe_j$, mit $S_3 e_j = je_j$, so daß gilt: $S_3 f = jf$; dann transformiert man die $f \in \mathbb{C}^{2|j|+1}$ mit $D^{(|j|)}(U_p)$, $f \mapsto f'$, $f'(e, \underline{p}) := D^{(|j|)}(U_p) f(e, \underline{p})$, so daß für die f' gilt: $\underline{p} \cdot \underline{S} f'(e, \underline{p}) = j|\underline{p}| f'(e, \underline{p})$, und erhält auf diese Weise:

$$\begin{aligned}
 2.4 \quad i) \quad & (T[0|p, j](a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) T^{-1} f)(e, \underline{p}) = \\
 & = e^{iea_0 - i\underline{p} \cdot \underline{a}} D^{(|j|)}(U) f(e - \underline{p} \cdot \underline{v}, D(U)^{-1} \underline{p}), \\
 & f \in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C}^{2|j|+1}), \quad p > 0, \quad j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \text{ mit} \\
 ii) \quad & \underline{p} \cdot \underline{S} f(e, \underline{p}) = j|\underline{p}| f(e, \underline{p}).
 \end{aligned}$$

Für Spin 1/2 und Spin 1 erhalten wir aus 2.4:

Spin 1/2:

$$\begin{aligned}
 2.5 \quad i) \quad & (T[0|p, \pm \frac{1}{2}](a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) T^{-1} f)(e, \underline{p}) = \\
 & = e^{iea_0 - i\underline{a} \cdot \underline{p}} U f(e - \underline{p} \cdot \underline{v}, D(U)^{-1} \underline{p}), \\
 & f \in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C}^2), \quad p > 0, \text{ mit} \\
 ii) \quad & \underline{p} \cdot \underline{\sigma} f(e, \underline{p}) = \pm |\underline{p}| f(e, \underline{p});
 \end{aligned}$$

Gleichung 2.5 ii) kann man als nicht-relativistische Weyl-Gleichung interpretieren.

Spin 1:

$$\begin{aligned}
 2.6 \quad i) \quad & (T[0|p, \pm 1](a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) T^{-1} \underline{f})(e, \underline{p}) = \\
 & = e^{iea_0 - i\underline{a} \cdot \underline{p}} D(U) \underline{f}(e - \underline{p} \cdot \underline{v}, D(U)^{-1} \underline{p}), \\
 & \underline{f} \in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C}^3), \quad p > 0, \text{ mit} \\
 ii) \quad & \underline{p} \times \underline{f}(e, \underline{p}) = \pm |\underline{p}| \underline{f}(e, \underline{p}).
 \end{aligned}$$

Definieren wir $\underline{E} := \text{Realteil } \underline{f}$ und $\underline{B} := \text{Imaginärteil } \underline{f}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
 2.7 \quad & \underline{p} \cdot \underline{E}(e, \underline{p}) = 0, \quad \underline{p} \cdot \underline{B}(e, \underline{p}) = 0, \\
 & \underline{p} \times \underline{E}(e, \underline{p}) = \mp |\underline{p}| \underline{B}(e, \underline{p}), \quad \underline{p} \times \underline{B}(e, \underline{p}) = \pm |\underline{p}| \underline{E}(e, \underline{p});
 \end{aligned}$$

die Gleichungen 2.7 kann man als nicht-relativistische Maxwell-Gleichungen interpretieren.

Aus den Gleichungen 2.5 ii und 2.6 ii folgt bereits $\underline{p}^2 f(e, \underline{p}) = \underline{p}^2 f(e, \underline{p})$, nicht aber aus 2.4 ii für $|j| > 1$: Für $|j| > 1$ folgt aus 2.4 ii nur $\underline{p}^2 f(e, \underline{p}) = r^2 \underline{p}^2 f(e, \underline{p})$ mit $r = |j|/1$, $1 > 0$ und $1 = |j|$, $|j| - 1, \dots$

Wir untersuchen nun die analytischen Vektoren der Darstellung $[0|p, j]$. Sei

$$2.8 \quad A_{p,j} := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C}) \mid \right. \\ \text{i) } f(e, \underline{p}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l-|j|}^{l+|j|} f_1^m(e) D^{(l+|j|)}(\underline{U}_{\underline{p}}^{-1})_{jm}, \\ \text{ii) } f_1^m \in S(\mathbb{R}) \text{ und } f_1^m = 0 \text{ für fast alle } l \in \mathbb{N}, \\ \left. \text{iii) } f_1^m \text{ analytisch für alle } l \in \mathbb{N} \text{ und alle } m \right\},$$

wo $S(\mathbb{R})$ der Schwartz'sche Funktionenraum ist und $D^{(k)}(\underline{U}_{\underline{p}}^{-1})_{mn}$ die Matrixelemente der $(2k+1)$ -dimensionalen irreduziblen Darstellung der $SU(2)$ in der Helizitätsbasis sind, für die gilt:

$$2.9 \quad D^{(k)} \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix}_{mn} = w^{2n} \delta_{mn} \quad \text{für } w \in \mathbb{C}_1, m, n = -k, -k+1, \dots, k-1, k.$$

$A_{p,j}$ ist dicht in $L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C})$, da $(D^{(l+|j|)}(\underline{U}_{\underline{p}}^{-1})_{jm})_{l=0, m=-l-|j|}^{\infty, l+|j|}$ ein vollständiges Orthogonalsystem in $L_2(S_2(p), \mathbb{C})$ ist und die Menge der analytischen Funktion aus $S(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dicht ist.

Für f aus $A_{p,j}$ gilt mit 2.1

$$2.10 \quad ([0|p, j](a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(e, \underline{p}) = \\ = e^{i \underline{e} a_0 - i \underline{a} \cdot \underline{p}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l-|j|}^{l+|j|} f_1^m(e - \underline{p} \cdot \underline{v}) \sum_{m'=-l-|j|}^{l+|j|} D^{(l+|j|)}(U)_{m'm} \times \\ \times D^{(l+|j|)}(\underline{U}_{\underline{p}}^{-1})_{jm},$$

so daß f aus $A_{p,j}$ ein analytischer Vektor von $[0|p, j]$ ist.

Die Darstellungen der $IO(1,3)_0$, die Tachyonen beschreiben, sind von der Form $(a, A) \mapsto e^{i \underline{a} k} V(A_k^{-1} A A_{L(A)}^{-1} A_k) f(L(A)^{-1} k)$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$,

$(L(A)k) \cdot \phi := A k \cdot \phi A^+$, mit $f \in L_2(M, H)$, wo M eine Bahn der Lorentzgruppe im Minkowski-Raum mit $k^2 < 0$ ist und H ein Hilbertraum, auf dem die "kleine" Gruppe $SU(1,1)$ durch V unitär darstellt wird.

Nun sind bis auf die triviale Darstellung alle unitären Darstellungen der $SU(1,1)$ unendlich-dimensional, so daß wir erst den Fall einer trivialen Darstellung der kleinen Gruppe untersuchen wollen. Für die Darstellung der Poincarégruppe gilt dann:

$$2.11 \quad (U(a, A)f)(k) = e^{iak} f(L(A)^{-1}k) \text{ mit}$$

$f \in L_2^m(\{k \in \mathbb{R}^4 \mid k^2 = -p^2\}, \mathbb{C})$, wo m das invariante Maß auf der Bahn $k^2 = -p^2$ ist.

$M := \{k \in \mathbb{R}^4 \mid k^2 = -p^2\}$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R} \times S_2(p)$; durch eine unitäre Transformation erhalten wir aus 2.11 die Darstellung U' auf $L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C})$:

$$2.12 \quad (U'(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(e, \underline{p}) = e^{iea_0 - i\sqrt{1+e^2/p^2}\underline{a} \cdot \underline{p}} \sqrt{\mathcal{J}_p(e, \underline{p}, \underline{v})} \times \\ \times f(\sqrt{1+\underline{v}^2}e - \sqrt{1+e^2/p^2}\underline{v} \cdot \underline{p}, \mathcal{J}_p(e, \underline{p}, \underline{v})D(U)^{-1}\underline{p}')$$

mit $\underline{p}' := \underline{p} + \left(\frac{-e}{\sqrt{1+e^2/p^2}} + \frac{\underline{p} \cdot \underline{v}}{1+\sqrt{1+\underline{v}^2}}\right)\underline{v}$ und

$$\mathcal{J}_p(e, \underline{p}, \underline{v}) := \sqrt{\frac{p^2 + e^2}{p^2 + (\sqrt{1+\underline{v}^2}e - \sqrt{1+e^2/p^2}\underline{v} \cdot \underline{p})^2}}, \quad f \in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C}).$$

Definieren wir

$$2.13 \quad J_s f(e, \underline{p}) := |s|^{-1/2} f\left(\frac{1}{s}e, \underline{p}\right), \quad T_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) := (sa_0, s\underline{a}, \underline{v}, U),$$

so erhalten wir mit K_s aus 4.4.1v

$$2.14 \quad ([0|p, 0]_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(e, \underline{p}) := (J_s^{-1}U'(T_s^{-1} \circ K_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U))J_s f)(e, \underline{p}) \\ = e^{iea_0 - i\sqrt{1+s^2e^2/p^2}\underline{a} \cdot \underline{p}} \sqrt{\mathcal{J}_p(se, \underline{p}, s\underline{v})} \times \\ \times f(\sqrt{1+s^2\underline{v}^2}e - \sqrt{1+s^2e^2/p^2}\underline{v} \cdot \underline{p}, \mathcal{J}_p(se, \underline{p}, s\underline{v})D(U)^{-1}\underline{p}(s)), \text{ mit} \\ \underline{p}(s) := \underline{p} + s^2\left(\frac{-e}{\sqrt{1+s^2e^2/p^2}} + \frac{\underline{p} \cdot \underline{v}}{1+\sqrt{1+s^2\underline{v}^2}}\right)\underline{v} \text{ für } s \neq 0; \\ [0|p, 0]_0 := [0|p, 0].$$

Für f aus $A_{p,j}$ sieht man leicht, daß $[0|p, 0]_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f$ analytisch ist, denn die Funktionen $D^{(k)}(U_p^{-1})_{om}$ sind Polynome in $\underline{p}$. Also definieren 2.13 und 2.14 eine Kontraktion des spinlosen Tachyons mit $k^2 = -p^2$ auf ein spinloses Wellenfeld mit der Wellenzahl p .

Kommen wir nun zu Tachyonen mit von 0 verschiedenem Spin. Die ihren Spin charakterisierenden Darstellungen der $SU(1,1)$ wurden von BARGMANN [33] aufgesucht. Wir wollen hier nicht näher auf sie eingehen und nur anmerken, daß die Darstellungen für diskreten Spin $|j|$ beschrieben werden können auf Folgen $(f_{j+\text{sign}(j)l})_{l=0}^{\infty}$. In der Helizitätsbasis gilt dann wieder

$$2.15 \quad v^j \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix}_{kl} = w^{2l} \delta_{kl} \quad \text{für } w \in \mathbb{C}_1, \quad k, l = j, j+\text{sign}(j)1, \dots$$

Als Boost wählen wir

$$2.16 \quad A(e, \underline{p}) := U_{\underline{p}} A := U_{\underline{p}} \frac{1}{\sqrt{2(1+\sqrt{1+e^2/p^2})}} ((1+\sqrt{1+e^2/p^2}) \Pi + e/p \, \delta_3) ,$$

Damit ergibt sich die Darstellung der Poincarégruppe zu

$$2.17 \quad (U'(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)_k(e, \underline{p}) = e^{iea_0 - i\sqrt{1+e^2/p^2} \underline{p} \cdot \underline{a}} \sqrt{\mathcal{P}_p(e, \underline{p}, \underline{v})} \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} v^j (A_e^{-1} U_{\underline{p}}^{-1} A(\underline{v}) U U_{D(U)^{-1} \underline{p}'} A_{\sqrt{1+\underline{v}^2} e - \sqrt{1+e^2/p^2} \underline{p} \cdot \underline{v}})_{k, j+\text{sign}(j)l} \times \\ \times f_{j+\text{sign}(j)l}(\sqrt{1+\underline{v}^2} e - \sqrt{1+e^2/p^2} \underline{p} \cdot \underline{v}, \mathcal{P}_p(e, \underline{p}, \underline{v}) D(U)^{-1} \underline{p}') ,$$

mit $\underline{p}'$ und $\mathcal{P}_p$ wie in 2.12 .

So erhalten wir mit 2.13 und $[0|p, j]_s(a, A) := J_s^{-1} U'(T_s^{-1} K_s(a, A)) J_s :$

$$2.18 \quad ([0|p, j]_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)_k(e, \underline{p}) := e^{iea_0 - i\sqrt{1+s^2 e^2/p^2} \underline{a} \cdot \underline{p}} \sqrt{\mathcal{P}_p(se, \underline{p}, s\underline{v})} \times \\ \sum_{(e, j+s\underline{v}) \in \mathbb{N}} v^j (A_{se}^{-1} U_{\underline{p}}^{-1} A(s\underline{v}) U U_{D(U)^{-1} \underline{p}(s)} A_s(\sqrt{1+s^2 \underline{v}^2} e - \sqrt{1+s^2 e^2/p^2} \underline{p} \cdot \underline{v}))_{kl} \\ f_1(\sqrt{1+s^2 \underline{v}^2} e - \sqrt{1+s^2 e^2/p^2} \underline{p} \cdot \underline{v}, \mathcal{P}_p(se, \underline{p}, s\underline{v}) D(U)^{-1} \underline{p}(s))$$

mit $\underline{p}(s)$ wie in 2.14 für $s \neq 0$;

$$[0|p, j]_0 := \bigoplus_{l=0}^{\infty} [0|p, j+\text{sign}(j)l] .$$

Ist f_1 für fast alle l gleich 0 und $f_1 \in A_{p,1}$ für alle l , so ist $[0|p, j]_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f$ in $s, a_0, \underline{a}, \underline{v}, U$ analytisch, so daß 2.18 eine Kontraktion der Tachyondarstellung der Poincarégruppe mit $k^2 = -p^2$, diskretem Spin $|j|$ und der Helizität $\text{sign}(j)$ auf die direkte Summe von Wellenfelddarstellungen der Galileigruppe mit Wellenzahl p , dem Spin $|j|+l$, $l = 0, 1, 2, \dots$ und derselben Helizität $\text{sign}(j)$ ist.

Wir wollen den Beweis für diese Behauptung nur kurz skizzieren. Sei $f_1(e, \underline{p}) = \delta_{11} a(e) D^{(1'+|1|)} (U_{\underline{p}}^{-1})_{im}$ mit $i = j + \text{sign}(j)n$, $n \in \mathbb{N}$, und $1' \in \mathbb{N}$, $-1' - |1| \leq m \leq 1' + |1|$, $m-j \in \mathbb{Z}$, sowie $a \in S(\mathbb{R})$ und analytisch. Der einzige Term von $[0|p, j]_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f$, dessen Analytizität dann noch in Frage steht, ist von der Form

$$2.19 \quad W(s, e, \underline{v}; \underline{p})_{lim}^{j1'} = V^j (A_{se}^{-1} U_{\underline{p}}^{-1} A(s \underline{v}) U_{\underline{p}(s)} A_{se(s)})_{li} \times \\ \times D^{(1'+|1|)} (U_{\underline{p}(s)}^{-1} U_{\underline{p}})_{im}, \quad \text{mit} \\ e(s) := \sqrt{1+s^2 \underline{v}^2} e - \sqrt{1+s^2 e^2 / \underline{p}^2} \underline{p} \cdot \underline{v},$$

denn $U U_{D(U)^{-1} \underline{p}(s)} A_{se(s)} = U_{\underline{p}(s)} U_{\underline{p}(s)}^{-1} U U_{D(U)^{-1} \underline{p}(s)} A_{se(s)} =$
 $= U_{\underline{p}(s)} \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix} A_{se(s)} = U_{\underline{p}(s)} A_{se(s)} \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix}$ mit $w = e^{i \chi(\underline{p}(s), U)/2}$, und
 $U_{D(U)^{-1} \underline{p}(s)}^{-1} = (U_{\underline{p}(s)}^{-1} U U_{D(U)^{-1} \underline{p}(s)})^{-1} U_{\underline{p}(s)}^{-1} U = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix}^{-1} U_{\underline{p}(s)}^{-1} U$
 mit dem selben w , so daß sich die von U abhängigen Terme wegen der Wahl der Helizitätsbasis bis auf eine Summe über $D^{(1'+|1|)}(U)_{mm}$ "herauskürzen".

Sei nun $Z := A_{se}^{-1} U_{\underline{p}}^{-1} A_{se(s)}$, $R := U_{\underline{p}}^{-1} U_{\underline{p}(s)}$; dann sind weder Z noch R analytisch, aber für $Z_{11} Z_{22}$, $Z_{12} Z_{21}$, $R_{11} R_{22}$, $R_{12} R_{21}$, $Z_{11} R_{22}$, $Z_{12} R_{21}$ und ihre konjugiert komplexen ist das der Fall. Weiter sind $Z_{11} Z_{12}$, $R_{11} R_{12}$, $Z_{11} R_{12}$ und $Z_{12} R_{11}$ in s , e und $\underline{v}$, nicht aber in $\underline{p}$ analytisch. Eine genauere Analyse der Matrixelemente von V^j und $D^{(1'+|1|)}$ ergibt nun, daß W ein Polynom in den angeführten Produkten von Matrixelementen ist, so daß W in s , e und $\underline{v}$ analytisch ist. Dazu ist W bzgl. $\underline{p}$ integrierbar und bzgl. e polynomial beschränkt. Hieraus folgt: $([0|p, j]_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f_1)_{11}(e, \underline{p})$ ist in $s, a_0, \underline{a}, \underline{v}, U$ analytisch und die Entwicklungskoeffizienten sind als Funktionen von e und $\underline{p}$ wieder Elemente von $L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C})$; somit ist f_1 ein analytischer Vektor von $[0|p, j]_s$.

Fassen wir zusammen: Spinlose Tachyonen mit Viererimpulsquadrat $k^2 = -p^2$ können gemäß 2.14 in nicht-relativistische Wellenfelder mit der Wellenzahl p kontrahiert werden, Tachyonen mit Spin $|j| > 0$, Helizität $\text{sign}(j)$ und $k^2 = -p^2$ gemäß 2.18 in die direkte Summe nicht-relativistischer Wellenfelder mit Spin $|j|+1$, $l \in \mathbb{N}$, Helizität $\text{sign}(j)$ und der Wellenzahl p . In einer nicht-relativistischen Beschreibung würden Tachyonen also als Wellenfelder mit fester Helizität und Wel-

lenzahl, aber einem inneren Spin-Freiheitsgrad auftreten; der Spin wäre zwar eine nicht-relativistische Invariante, würde aber von verschiedenen Beobachtern als verschieden angegeben. Der Wellenzahl hingegen würde von allen Beobachtern der gleiche Wert zugeschrieben, im Gegensatz zu der in §3 entwickelten nicht-relativistischen Beschreibung masseloser Teilchen.

Die aus Tachyonen kontrahierten Darstellungen der Galileigruppe sehen INÖNÜ und WIGNER deshalb als unphysikalisch an, weil sie ein Grenzwert von Darstellungen der Poincarégruppe mit negativem Vierer-Impulsquadrat sind. Wir haben aber gesehen, daß diese Darstellungen eine physikalische Interpretation haben: Zwar nicht als Teilchen, aber als nicht-relativistische Wellenfelder. Deshalb stellt sich jetzt die Frage umgekehrt: Warum beschreibt der nicht-relativistische Grenzwert eine physikalische Situation, nicht aber die Tachyonen selbst?

§3 Relativistische masselose Teilchen und nicht-relativistische Wellenfelder

Wir wollen uns auch hier auf Darstellungen mit diskretem Spin beschränken. Diese haben die Form

$$3.1 \quad (U(a, A)f)(k) = e^{iak(A_k^{-1}AA_L(A)^{-1}k)} {}_{11} 2^j f(L(A)^{-1}k),$$

$f \in L_2^m(S_0^+, \mathbb{C})$, m das invariante Maß auf dem Vorwärts-Lichtkegel S_0^+ , $A_k \in SL(2, \mathbb{C})$ mit $A_k := U_k \begin{bmatrix} \sqrt{k_0} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{k_0} \end{bmatrix}$, U_k wie in 2.3.

A_k ist der Boost von $(1, 0, 0, 1)$ auf k . Durch Einführung von Koordinaten aus $\mathbb{R}_+ \times S_2(p)$ für S_0^+ erhalten wir

$$3.2 \quad (U'(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(e, \underline{p}) = e^{iea_0 - i \frac{e}{p} \underline{p} \cdot \underline{a}} \sqrt{\sqrt{1+\underline{v}^2} - \frac{1}{p} \underline{p} \cdot \underline{v}} {}^{2j-1} \times \\ \times (U_{\underline{p}}^{-1} A(\underline{v}) U_{\underline{p}}) {}_{11} 2^j e^{ij \mathcal{K}(\underline{p}', U)} f((\sqrt{1+\underline{v}^2} - \frac{1}{p} \underline{p} \cdot \underline{v}) e, D(U)^{-1} \underline{p}'),$$

$f \in L_2(\mathbb{R}_+ \times S_2(p), \mathbb{C})$, wobei $e^{ij \mathcal{K}}$ wie in 2.2 definiert ist und

$$\underline{p}' := \frac{1}{\sqrt{1+\underline{v}^2} - \frac{1}{p} \underline{p} \cdot \underline{v}} (\underline{p} + (-p + \frac{\underline{p} \cdot \underline{v}}{1+\sqrt{1+\underline{v}^2}}) \underline{v}) \text{ ist.}$$

Die Wellenfeld-Darstellungen der Galileigruppe sind auf $L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C})$ definiert. Den Übergang von $L_2(\mathbb{R}_+ \times S_2(p), \mathbb{C})$ zu $L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C})$ können wir einmal durch Logarithmierung des Argu-

ments e und zum anderen dadurch vollziehen, daß wir für e negative Werte zulassen, was einem Viererimpuls auf dem Rückwärts-Lichtkegel S_0^- entspricht. Bei Logarithmierung erhalten wir:

$$3.3 \quad (U^u(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(e, \underline{p}) = e^{i \exp(\frac{e}{p})(p \underline{a}_0 - \underline{p} \cdot \underline{a})} \sqrt{\sqrt{1 + \underline{v}^2} - \frac{1}{p} \underline{p} \cdot \underline{v}}^{2j-2} \times \\ \times (U_{\underline{p}}^{-1} A(\underline{v}) U_{\underline{p}})_{11}^{2j} e^{ij} \chi(\underline{p}', U) f(e + p \log(\sqrt{1 + \underline{v}^2} - \frac{1}{p} \underline{p} \cdot \underline{v}), D(U)^{-1} \underline{p}'), \\ f \in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C}).$$

Damit und mit K_s aus 4.4.1v sowie

$$3.4 \quad J_s f(e, \underline{p}) := |s|^{-1/2} f(\frac{1}{s} e, \underline{p}), \quad T_s(a, A) := (sa, A),$$

erhalten wir die Darstellungen

$$3.5 \quad [O|p, j]_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) := e^{-i p a_0 / s} J_s^{-1} U^u(T_s^{-1} \circ K_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)) J_s, \\ ([O|p, j]_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(e, \underline{p}) = e^{i(\exp(\frac{se}{p}) - 1) p a_0 / s - i \exp(\frac{se}{p}) \underline{a} \cdot \underline{p}} \times \\ \times \sqrt{\sqrt{1 + s^2 \underline{v}^2} - \frac{s}{p} \underline{p} \cdot \underline{v}}^{2j-2} (U_{\underline{p}}^{-1} A(s \underline{v}) U_{\underline{p}(s)})_{11}^{2j} e^{ij} \chi(\underline{p}(s), U) \times \\ \times f(e + \frac{p}{s} \log(\sqrt{1 + s^2 \underline{v}^2} - \frac{s}{p} \underline{p} \cdot \underline{v}), D(U)^{-1} \underline{p}(s)), \\ f \in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C}) \text{ mit}$$

$$\underline{p}(s) := \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 \underline{v}^2} - \frac{s}{p} \underline{p} \cdot \underline{v}} (\underline{p} + s(-\underline{p} + \frac{s \underline{p} \cdot \underline{v}}{1 + \sqrt{1 + s^2 \underline{v}^2}}) \underline{v}) \quad \text{für } s \neq 0;$$

$$[O|p, j]_0 := [O|p, j] \text{ mit } [O|p, j] \text{ aus 2.1.}$$

Mit einer zu dem um 2.19 Ausgeführten analogen Methode ergibt sich, daß $[O|p, j]_s(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f$ für $f \in A_{p, j}$ (vgl. 2.8) analytisch ist; dabei zeigt man die Analytizität von $(U_{\underline{p}}^{-1} A(s \underline{v}) U_{\underline{p}(s)})_{11}^{2j} \times$
 $\times D^{(1+|j|)}(U_{\underline{p}(s)}^{-1} U_{\underline{p}})_{jm}$ bezüglich $\underline{v}$ und s analog zu dem nach 2.19
 gesagten.

Jetzt wollen wir die Darstellung 3.2 der Poincarégruppe nach Erweiterung des Energie-Spektrums auf negative Werte kontrahieren: Wählen wir f statt aus $L_2(\mathbb{R}_+ \times S_2(p), \mathbb{C})$ aus $L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{C})$, so ist die Darstellung reduzibel, und zwar eine direkte Summe der Darstellungen mit positiver und der mit negativer Energie. Formen wir sie um zu

$$\begin{aligned}
 3.6 \quad (U''(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(e, \underline{p}) &:= e^{i(e+\underline{p})} (a_0 - \frac{1}{\underline{p} \cdot \underline{a}}) \sqrt{1 + \underline{v}^2 - \frac{1}{\underline{p} \cdot \underline{v}}}^{2j-1} \times \\
 &\times (U_{\underline{p}}^{-1} A(\underline{v}) U_{\underline{p}})_{11}^{2j} e^{ij} \chi(\underline{k}', U) \times \\
 &\times f((\sqrt{1 + \underline{v}^2} - \frac{1}{\underline{p} \cdot \underline{v}})e + (\sqrt{1 + \underline{v}^2} - 1)\underline{p} - \underline{p} \cdot \underline{v}, D(U)^{-1} \underline{p}'), \\
 f &\in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{K}) \text{ mit } \underline{p}' \text{ wie in 3.2,}
 \end{aligned}$$

so erhalten wir, indem wir in 3.5 U'' durch U'' ersetzen, die Darstellung $[O|p, j]_s'$,

$$\begin{aligned}
 3.7 \quad ([O|p, j]_s'(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f)(e, \underline{p}) &= \\
 &= e^{iea_0 - i(1 + \frac{s\underline{e}}{\underline{p}}) \underline{p} \cdot \underline{a}} \sqrt{1 + s^2 \underline{v}^2 - \frac{s}{\underline{p} \cdot \underline{v}}}^{2j-1} (U_{\underline{p}}^{-1} A(s\underline{v}) U_{\underline{p}(s)})_{11}^{2j} \times \\
 &\times e^{ij} \chi(\underline{p}(s), U) f((\sqrt{1 + s^2 \underline{v}^2} - \frac{s}{\underline{p} \cdot \underline{v}})e + \frac{\underline{p}}{s}(\sqrt{1 + s^2 \underline{v}^2} - 1) - \underline{p} \cdot \underline{v}, D(U)^{-1} \underline{p}(s)) \\
 f &\in L_2(\mathbb{R} \times S_2(p), \mathbb{K}), \text{ mit } \underline{p}(s) \text{ wie in 3.5 für } s \neq 0; \\
 [O|p, j]_s' &:= [O|p, j] \text{ mit } [O|p, j] \text{ aus 2.1.}
 \end{aligned}$$

$[O|p, j]_s'(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U)f$ ist für $f \in A_{p, j}$ (vgl. 2.8) in s , $a_0, \underline{a}, \underline{v}, U$ analytisch.

Wir haben also das folgende Ergebnis. (K, J, T) mit K wie in 4.4.1v, J und T wie in 3.4 ist ein einfacher Kontraktor bis auf den Faktor $w, w(a_0, \underline{a}, \underline{v}, U) := e^{-ip a_0}$, von der Wellenfeld-Darstellung $[O|p, j]$ der Galileigruppe auf die Darstellungen U'' und U'' der Poincarégruppe, die masselosen relativistischen Teilchen mit dem Spin j und der Helizität $\text{sign}(j)$ entsprechen, U'' mit positivem Energie-Spektrum, U'' mit nach beiden Seiten unbeschränktem Energie-Spektrum. Im Unterschied zum Fall der Kontraktion von Darstellungen, die Teilchen mit von 0 verschiedener Masse beschreiben (vgl. §1), ist die Abweichung der nicht-relativistischen Beschreibung von der relativistischen nicht von der Ordnung $\frac{1}{2}c^2$, sondern nur von der Ordnung $\frac{1}{2}c$, und zwar sowohl im Fall der Kontraktion von U'' als auch im Fall der Kontraktion von U'' . Meßbare Unterschiede zwischen relativistischer und nicht-relativistischer Theorie sind also zuerst bei der Beschreibung masseloser Teilchen zu erwarten.

In der Tat lassen sich ja masselose Teilchen nicht-relativistisch gar nicht mehr als Teilchen interpretieren, sondern nur als Wellenfeld. Weiter zwingt die Erkenntnis, daß bei elektromagnetischen Feldern Frequenz und Wellenzahl in der Form $\gamma = ck$ gekoppelt sind, zu der Annahme eines stofflichen Trägers des elektromagnetischen

Feldes, d.h. die Einführung des Äthers ist in einer nicht-relativistischen Theorie notwendig zur Beschreibung masseloser Teilchen. Die nicht-relativistische Theorie erfordert nun, daß die Konstante c von der Geschwindigkeit des Beobachters abhängt, da dies für χ der Fall ist, nicht aber für k ; und zwar müßte sich c bei Bewegung in Richtung des Lichtes mit der Geschwindigkeit v zu $c-v$ verändern. MICHELSON's Ergebnis der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zwingt dann - immer im Rahmen einer nicht-relativistischen Theorie - zu Hypothesen über die Mitführung des Äthers durch die Erde, damit eine kleinere Relativgeschwindigkeit zwischen Erde und Äther entsteht. So müßte man Schritt für Schritt mit jeder Verbesserung der Meßgenauigkeit immer extravaganzere Eigenschaften des Äthers fordern, um der experimentellen Erfahrung gerecht zu werden; erst die Einführung der Lorentz-Transformation an Stelle der Galilei-Transformation macht die Annahme eines Äthers und alle sich damit ergebenden Schwierigkeiten überflüssig.

Bei der Kontraktion von Darstellungen der Poincarégruppe zu solchen der Galileigruppe sind wir folgenden mathematischen Situationen begegnet:

- i) Einfache Kontraktion bis auf einen Faktor führt von einer irreduziblen Vektordarstellung zu einer irreduziblen Multiplikator-darstellung mit nicht-trivialem Multiplikator (4§4);
- ii) einfache Kontraktion bis auf einen Faktor führt von einer irreduziblen Vektordarstellung zu einer irreduziblen Vektordarstellung (6.3.5 und 6.2.14);
- iii) einfache Kontraktion bis auf einen Faktor führt von äquivalenten irreduziblen Vektordarstellungen zu inäquivalenten irreduziblen Vektordarstellungen (6.3.5);
- iv) einfache Kontraktion führt von einer irreduziblen Vektordarstellung zu einer reduzierbaren Vektordarstellung (6.2.18);
- v) einfache Kontraktion bis auf einen Faktor führt von einer reduzierbaren Vektordarstellung zu einer irreduziblen Vektordarstellung (6.3.7).

Diese Beispiele zeigen, daß sich über Irreduzibilität und Äquivalenz von Darstellungen bei einer Deformation keine allgemeinen Aussagen machen lassen, nicht einmal im Fall einfacher Kontraktionen.

§4 Deformation wechselwirkender nicht-relativistischer Teilchen zu wechselwirkenden relativistischen Teilchen

Ist eine Darstellung der Galileigruppe gegeben, die wechselwirkende Teilchen beschreibt, so kann man durch Ausreduzieren der Darstellung und Deformation der einzelnen Komponenten gemäß 1.6 immer eine Darstellung der Poincarégruppe gewinnen; ob diese Darstellung oder eine äquivalente wieder wechselwirkende Teilchen beschreibt, bleibt dabei aber eine offene Frage. Wir wollen jetzt aus einem "naiven" nicht-relativistischen Zwei-Teilchen Modell ein relativistisches konstruieren. Relativistisch soll dabei heißen, daß der Hamiltonoperator, der Impuls, der Drehimpuls und der Boost eine Darstellung der Poincaréalgebra sind, und zwar eine zu einer Gruppendarstellung integrable. Als naives nicht-relativistisches Zwei-Teilchen Modell bezeichnen wir das aus zwei freien Teilchen durch Addition eines Potentials zum Hamilton-Operator hervorgehende System.

Zwei (verschiedene) nicht-relativistische freie Teilchen seien beschrieben durch das Tensor-Produkt zweier irreduzibler Darstellungen $[m_1 | e_1, j_1] \otimes [m_2 | e_2, j_2]$; für die Erzeugenden gilt dann nach Identifizierung von $L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{2j_1+1}) \otimes L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{2j_2+1})$ mit $L_2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{2j_1+1} \otimes \mathbb{R}^{2j_2+1})$ (vgl. 1.7):

$$4.1 \text{ Energie} \quad : E = \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + e_1 + e_2$$

$$\text{Impuls} \quad : \underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$$

$$\text{Boost} \quad : \underline{K} = im_1 \underline{\partial}_1 + im_2 \underline{\partial}_2$$

$$\text{Drehimpuls: } \underline{J} = +ip_1 \times \underline{\partial}_1 + ip_2 \times \underline{\partial}_2 + \underline{S}_1 \otimes \underline{1} + \underline{1} \otimes \underline{S}_2$$

Transformieren wir auf Schwerpunktskoordinaten,

$$4.2 \text{ Schwerpunktsimpuls: } \underline{P} := \underline{p}_1 + \underline{p}_2$$

$$\text{innerer Impuls} \quad : \quad \underline{p} := \frac{1}{m_1 + m_2} (m_2 \underline{p}_1 - m_1 \underline{p}_2)$$

so erhalten wir hieraus

$$4.3 \text{ Energie} \quad : E = \frac{1}{2M} P^2 + \frac{1}{2\mu} p^2 + e_1 + e_2$$

$$\text{Impuls} \quad : \underline{P}$$

$$\text{Boost} \quad : \underline{K} = iM \underline{\partial}_P$$

$$\text{Drehimpuls: } \underline{J} = \underline{ip} \times \underline{\partial}_p + \underline{S}$$

$$\text{mit } M := m_1 + m_2, \quad \underline{\mu} := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \underline{S} := \underline{S}_1 \otimes \Pi + \Pi \otimes \underline{S}_2 + \underline{ip} \times \underline{\partial}_p,$$

und für die zentralen Elemente:

$$4.4 \quad \text{Masse} \quad : M = m_1 + m_2$$

$$\text{innere Energie: } E - \frac{1}{2M} \underline{p}^2 = \frac{1}{2\mu} \underline{p}^2 + e_1 + e_2$$

$$\text{Spin} \quad : \underline{S}^2 = (\underline{S}_1 \otimes \Pi + \Pi \otimes \underline{S}_2 + \underline{ip} \times \underline{\partial}_p)^2$$

Der innere Impuls liefert also das Spektrum der inneren Energie und des Spins eines Systems zweier freier Teilchen.

Die Galileigruppe wirkt nun auf die Schwerpunktsvariablen irreduzibel, auf die inneren Impulsvariablen nur als Zeitverschiebung und Drehung. Damit ist die Ausreduktion des Tensor-Produkts zweier irreduzibler Darstellungen der Galileigruppe zurückgeführt auf die Ausreduktion einer Darstellung der $\mathbb{R} \otimes \text{SU}(2)$. Letztere ergibt durch Separation der Abhängigkeit vom inneren Impuls in einen nur vom Betrag und einen nur von der Richtung abhängigen Faktor ein direktes Integral über die innere Energie von $e_1 + e_2$ bis unendlich und eine direkte Summe über den Bahndrehimpuls, und schließlich die Ausreduktion einer Darstellung der $\text{SU}(2)$ von der Art $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} \otimes D^{(1)}$ ($1 = \text{Bahndrehimpuls}$; vgl. [37]).

Wenn wir nun eine Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen einführen, die durch Addition eines Wechselwirkungsterms zur Energie beschrieben wird ohne eine Veränderung der sonstigen Erzeugenden der Produkt-Darstellung, so muß dieser Wechselwirkungsterm V mit dem Schwerpunktsimpuls $\underline{p}$ und dem Boost $\underline{K}$ vertauschen, kann also nur auf innere Variable wirken. Es bietet sich daher an, V zur inneren Energie zu addieren, d.h. die Gesamtenergie durch Veränderung der inneren Energie zu ändern.

Die innere Energie geht also aus $\frac{1}{2\mu} \underline{p}^2 + e_1 + e_2$ über in $\frac{1}{2\mu} \underline{p}^2 + e_1 + e_2 + V$; dabei wirkt V nur auf die inneren Variablen. Damit wir auf diese Weise eine Darstellung der Galileigruppe erhalten, ist notwendig und hinreichend, daß $\frac{1}{2\mu} \underline{p}^2 + V$ wesentlich selbstadjungiert ist und die von $\frac{1}{2\mu} \underline{p}^2 + V$ erzeugte unitäre Operatorgruppe mit $\underline{S}$ vertauscht. Die Wirkung der Galileigruppe auf die inneren Impulsvariablen ist auch im Fall von Wechselwirkung eine Zeitverschiebung, jetzt

aber mit der Erzeugenden $\frac{1}{2\mu} \underline{p}^2 + e_1 + e_2 + V$, und Drehung mit der Erzeugenden $\underline{S}$. Die Ausreduktion der Darstellung der Galileigruppe, die zwei wechselwirkende Teilchen beschreibt, ist damit wieder zurückgeführt auf die Ausreduktion einer Darstellung der $\mathbb{R} \otimes \text{SU}(2)$. Dabei führt man zunächst eine Zerlegung nach dem Spektrum der inneren Energie durch und dann eine Zerlegung nach den unter $\text{SU}(2)$ irreduziblen Teilräumen.

Die so gewonnenen irreduziblen Darstellungen der Galileigruppe kann man nun gemäß 1.6 zu Darstellungen der Poincarégruppe deformieren; so erhalten wir eine Darstellung der Poincarégruppe, die wie die Darstellung der Galileigruppe direkte Summe und direktes Integral über Spin und innere Energie von irreduziblen Darstellungen ist. Ist $j_1 = j_2 = 0$ und V ein betrags- und betragsquadrat-integriertes, in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ Hölder-stetiges Potential, das für $|\underline{x}| \rightarrow \infty$ stärker als die vierte Potenz von $|\underline{x}|$ abfällt, so ist die so gewonnene Darstellung der Poincarégruppe äquivalent zu der von MUTZE [26] angegebenen Darstellung, die zwei relativistische Teilchen mit direkter Wechselwirkung über das Potential V beschreibt. Man kann darum annehmen, daß die so gewonnene Darstellung auch in allgemeineren Fällen wechselwirkende relativistische Teilchen beschreibt. Wir wollen im folgenden das MUTZE'sche Modell in unseren Begriffsrahmen übertragen, wobei wir eine auf Grund der Ergebnisse von §1 gewählte Abhängigkeit von der Lichtgeschwindigkeit $c = 1/s$ einführen.

Zunächst definieren wir wie im nicht-relativistischen Fall Schwerpunktsimpuls und Relativimpuls:

$$4.5 \quad P(s) := p_1(s) + p_2(s) \text{ mit } p_i(s)_0 := \sqrt{(m_i + s^2 e_i)^2 + s^2 \underline{p}_i^2}, \quad \underline{p}_i(s) := \underline{p}_i.$$

Für den Relativimpuls gibt es nun mehrere Möglichkeiten; eine davon ist [38;p.III-62]:

$$4.6 \quad k(s) := L_{P(s)}(s)^{-1} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1(s) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_2(s) \right),$$

wo $L_{P(s)}(s)$ die Lorentztransformation ist, die den Vierervektor $(M(s), \underline{0})$ in $P(s)$ überführt, wobei

$$4.7 \quad M(s) := \sqrt{(m_1 + s^2 e_1)^2 + (m_2 + s^2 e_2)^2 + 2(p_1(s)_0 p_2(s)_0 - s^2 \underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)} = M + O(s^2)$$

mit M wie in 4.4. Für $\underline{k}(s)$ erhalten wir so

$$4.8 \quad \underline{k}(s) = \underline{p} + \frac{1}{M(s)} \left(\frac{m_1 p_2(s)_0 - m_2 p_1(s)_0}{m_1 + m_2} + s^2 \frac{\underline{p} \cdot \underline{p}}{(M(s) + p_1(s)_0 + p_2(s)_0)} \right) \underline{p}$$

$\underline{k}(s)$ ist der räumliche Impuls des Teilchens 1 im Schwerpunkt-System. Für die innere Energie erhalten wir:

$$4.9 \quad \frac{K(s) - M}{s^2} = \frac{1}{s^2} \left(\sqrt{(m_1 + s^2 e_1)^2 + s^2 \underline{k}(s)^2} + \sqrt{(m_2 + s^2 e_2)^2 + s^2 \underline{k}(s)^2} - m_1 - m_2 \right)$$

Wir führen jetzt einen weiteren Relativimpuls, $\underline{p}(s)$, ein, der die gleiche Richtung wie $\underline{k}(s)$ hat, aber dessen Betrag durch

$$4.10 \quad |\underline{p}(s)| := \sqrt{2M \frac{K(s) - M}{s} - e_1 - e_2} \quad \text{mit } \gamma \text{ wie in 4.3}$$

gegeben ist, so daß $\frac{K(s) - M}{s^2} = \frac{p(s)^2}{2M} + e_1 + e_2$; die innere Energie als Funktion des Relativimpulses $\underline{p}(s)$ hat also die gleiche Form wie im nicht-relativistischen Fall. Die Abhängigkeit der Impulse von der Lichtgeschwindigkeit ist

$$4.11 \quad \underline{P}(s) = \underline{P}, \quad \underline{k}(s) = \underline{p} + O(s^2), \quad \underline{p}(s) = \underline{p} + O(s^2) \quad \text{mit } \underline{p} \text{ aus 4.2.}$$

$\underline{k}(s)$ und $\underline{p}(s)$ sind also im nicht-relativistischen Grenzfalle beide gleich dem inneren Impuls.

Sei nun das Potential $V(\underline{x})$ nicht-relativistisch gegeben. Nach MULLER [26] gewinnen wir ein Modell für ein relativistisches Zwei-Teilchen System, indem wir zu der relativistischen inneren Energie $V(\underline{x}(s))$ addieren, die Erzeugenden $\underline{P}$ und $\underline{J}$ unverändert lassen und die Erzeugenden E und $\underline{K}$ entsprechend ändern, denn durch die Änderung der inneren Energie geht E in E' über,

$$4.12 \quad E' = \sqrt{\left(\frac{1}{s^2} \sqrt{(M + s^2 E)^2 - s^2 \underline{P}^2} + V(\underline{x}(s)) \right)^2 + \frac{1}{s^2} \underline{P}^2} - \frac{M}{s^2},$$

und $\underline{K}$ in ein $\underline{K}'$ mit $[\underline{m}, \underline{K}', \underline{n}, \underline{P}] = i \underline{m} \cdot \underline{n} (M + s^2 E')$; dabei bedeutet $\underline{x}(s)$ den Ort, der der Impulsvariablen $\underline{p}(s)$ zugeordnet ist, $\underline{x}(s) := i \frac{\partial}{\partial \underline{p}(s)}$. Offensichtlich haben dann die Operatoren der inneren Energie im relativistischen und im nicht-relativistischen Fall das gleiche Spektrum; das gilt auch für den Spin. Für die Interpretation dieses Zwei-Teilchen Systems verweisen wir auf [26].

Hier sollen abschließend nur noch Bemerkungen zum Verhalten des Systems für $s \rightarrow 0$ gemacht werden. Wir haben den Relativimpuls $\underline{p}(s)$ bereits als Funktion von s eingeführt, ebenso die Masse und die innere Energie. Da V aus L_1 sein soll, existiert die Fourier-Transformierte $\tilde{V}$,

$$4.13 \quad \tilde{V}(\underline{p}) := \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, e^{i\underline{p} \cdot \underline{x}} V(\underline{x}) ,$$

und die Wirkung von $\tilde{V}$ auf die Zustände ist nach [34;p.58] durch eine Faltung gegeben:

$$4.14 \quad (\tilde{V}f)(\underline{p}, \underline{p}) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \, \tilde{V}(\underline{p}-\underline{k}) f(\underline{p}, \underline{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \, \tilde{V}(\underline{k}) f(\underline{p}, \underline{p}-\underline{k}) .$$

Um die Wirkung von V auf das relativistische Zwei-Teilchen System zu beschreiben, müssen wir zunächst von Zwei-Teilchen-Variablen $\underline{p}_1, \underline{p}_2$ zu "äußeren" und inneren Variablen, nämlich $\underline{p} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$ und $\underline{p}(s)$, übergehen, in den inneren Variablen den Potentialterm einführen und auf Zwei-Teilchen-Variable zurücktransformieren. Die Transformation auf $\underline{p}$ und $\underline{p}(s)$ ist gegeben durch R_s ,

$$4.15 \quad R_s f(\underline{p}, \underline{p}) := \left| \det \frac{\partial(\underline{p}_1, \underline{p}_2)}{\partial(\underline{p}, \underline{p})} \right| f(\underline{p}_1, \underline{p}_2) .$$

Dabei sind $\underline{p}_1, \underline{p}_2$ Funktionen von $\underline{p}, \underline{p}$ und s ; ihre explizite Form wollen wir hier nicht angeben und nur anmerken, daß für $e_1 = e_2 = 0$

$$4.16 \quad R_s = J_s^{-1} R_1 J_s \text{ mit } J_s f(\underline{p}_1, \underline{p}_2) := |s|^{-3} f(s^{-1} \underline{p}_1, s^{-1} \underline{p}_2) \\ \text{und } J_s f(\underline{p}, \underline{p}) := |s|^{-3} f(s^{-1} \underline{p}, s^{-1} \underline{p}) \quad \text{für } s \neq 0 .$$

Die innere Energie ist dann

$$4.17 \quad E_1(s) = \frac{1}{2\mu} \underline{p}(s)^2 + e_1 + e_2 + R_s^{-1} \tilde{V} R_s .$$

Aus dem nach 4.4 gesagten folgt, daß es eine Deformation der relativistischen Darstellung zu einer nicht-relativistischen mit dem gleichen Potential gibt. Deshalb kann man, da $\tilde{V}f$ durch das Faltungsintegral 4.14 mit einem stetig differenzierbaren, beschränkten und für $|\underline{k}| \rightarrow \infty$ gegen 0 gehenden Kern $\tilde{V}(\underline{k})$ gegeben ist, annehmen, daß es eine dichte Menge von Funktionen gibt derart, daß $E_1(s)f$ als Funktion von s analytisch ist, und man durch die Parametrisierung mit s eine Deformation erhalten hat.

Es bleibt die Frage, ob diese Deformation eine Kontraktion sein kann. Für $V = 0$ und $e_1 = e_2 = 0$ ist unsere Deformation mit J_s wie in 4.15 und T_s wie in 4.4.3i eine einfache Kontraktion (vgl. nach 1.8). Für $V \neq 0$ und $e_1 = e_2 = 0$ kann unsere Deformation aber keine Kontraktion mit dem "freien" Kontraktor sein, weil sonst wegen 4.16 gelten müßte:

$$4.18 \quad J_S^1 \widetilde{V} J_S^{-1} = \frac{1}{s^2} \widetilde{V},$$

was nur von dem Potential $\text{const.}/\underline{x}^2$ erfüllt wird, das für $\text{const.} \neq 0$ nicht in der von MUTZE zugelassenen Klasse liegt.

Darüberhinaus gilt: Hat die innere Energie einen von 0 verschiedenen Eigenwert, so gibt es keinen einfachen Kontraktor von der nicht-relativistischen zur relativistischen Theorie. Denn gäbe es einen solchen Kontraktor, so würde für die Ruheenergie gelten:

$$E_0(s) = s^{-n} \ddot{A}_S^{-1} E_0(1) \ddot{A}_S, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ also in unserem Fall}$$

$$4.19 \quad (m_1+m_2)/s^2 + E_1(s) = s^{-n}(m_1+m_2) + s^{-n} \ddot{A}_S^{-1} E_1(1) \ddot{A}_S, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nun sind aber in der von MUTZE zugelassenen Klasse von Potentialen alle Eigenwerte isoliert, so daß sich der Eigenwert nicht analytisch verschieben läßt, also konstant ist. Wir erhalten somit aus 4.19 die Gleichung

$$4.20 \quad (m_1+m_2)/s^2 + \lambda = (m_1+m_2+\lambda)/s^n,$$

die für $n \neq 2$ keine Lösung hat und für $n = 2$ nur die Lösung $\lambda = 0$.

Hat die innere Energie zwei verschiedene Eigenwerte, so gibt es überhaupt keinen Kontraktor von der nicht-relativistischen zur relativistischen Theorie, denn sonst müßte es eine in einer Umgebung von 0 analytische Funktion f geben mit

$$4.21 \quad (m_1+m_2)/s^2 + \lambda_i = (m_1+m_2+\lambda_i)/f(s), \quad i = 1, 2,$$

was für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ unmöglich ist.

Somit muß man, obwohl die Galileigruppe sich aus der Poincarégruppe durch Kontraktion ergibt, bei der Deformation von Darstellungen der Poincarégruppe zu solchen der Galileigruppe auch solche Deformationen in Betracht ziehen, die nicht durch einen Kontraktor erzeugt werden, da man sonst nicht Systeme gebundener relativistischer Teilchen in Systeme gebundener nicht-relativistischer Teilchen deformieren könnte.

Schlußbemerkungen

Bei der Untersuchung der Deformationen der Poincarégruppe hatten wir die deSittergruppe $O(1,4)_0$ ausgeschlossen, weil sie nicht auf einer Mannigfaltigkeit definiert werden kann, auf der auch eine Poincarégruppen-Struktur definiert ist. Ist aber unsere Kenntnis der Symmetrien physikalischer Systeme und damit der algebraischen Gesetze der Symmetriegruppe unvollständig, so naturgemäß auch die Kenntnis der topologischen Struktur der Symmetriegruppe. Somit muß eine umfassende Analyse der Deformationen einer Lie-Gruppe auch Deformationen der Mannigfaltigkeit umfassen, auf der diese Lie-Gruppe erklärt ist. Es bietet sich dann das folgende Konzept einer "verallgemeinerten" Deformation an:

Eine "verallgemeinerte" Deformation D ist eine analytische Abbildung D von einem Produkt-Faserraum $(\Delta(M), p_\Delta, I) := (\{(x, y) \in M \times M \mid p(x) = p(y)\}, (x, y) \mapsto p(x) = p(y), I)$ über einem offenen Intervall I um 0 auf den Faserraum (M, p, I) derart, daß

i) $p \circ D = p_\Delta$, und daß

ii) $D: p_\Delta^{-1}(i) \longrightarrow p^{-1}(i)$ für alle i aus I eine Verknüpfung ist.

Der Faserraum (M, p, I) tritt in dieser Definition an die Stelle der Produktmannigfaltigkeit $I \times M$ und $\Delta(M)$ an die Stelle von $I \times M \times M$. Es ist dabei wesentlich, daß M kein Faserbündel ist, da M sonst ja eine typische Faser hat, wir aber gerade erreichen wollen, daß verschiedene Mannigfaltigkeiten durchlaufen werden. Entsprechend kann man dann einen "verallgemeinerten" Kontraktor als eine analytische Abbildung von einem Faserraum (M, p, I) auf eine Mannigfaltigkeit M' definieren derart, daß $K\{p(i)^{-1}$ für $i \neq 0$ ein Diffeomorphismus ist und D^K , $(x, y) \mapsto K_i^{-1}(v'(K_i(x), K_i(y)))$ für $i \neq 0$, eine "verallgemeinerte" Deformation. Die solchen "verallgemeinerten" Deformationen von Lie-Gruppen zugeordneten "verallgemeinerten" Deformationen der Lie-Algebren sind dann auch auf Faserräumen definiert, und es ist nicht gesichert, ob jede solche "verallgemeinerte" Deformation einer Lie-Algebra äquivalent ist zu einer Deformation.

Die deSittergruppe, bzw. die ihr entsprechende Raumzeit $O(1,4)_0 / O(1,3)_0$, wurde - trotz ihrer von der des $\mathbb{R}^4$ abweichenden Topologie - von der Kosmologie in Betracht gezogen, weil sie eine einfache Erklärung der Rotverschiebung gibt; da die Topologie des Raumes in

der deSitterwelt $O(1,4)_0/O(1,3)_0 \sim \mathbb{R} \times S_3$ kompakt ist, erhält man zugleich eine Erklärung für die geringe Helligkeit des Nacht-Himmels. Die deSittergruppe kommt jedoch als Symmetriegruppe der Raumzeit nicht in Betracht, weil man in der deSitter-Welt aus jedem Zustand mit positiver Energie durch eine deSitter-Transformation auch einen Zustand mit negativer Energie erzeugen kann. Für die Anti-deSittergruppe $\overline{O(2,3)}_0$ gibt es Zustandsräume mit positiver Energie; es ist jedoch noch nicht gut genug untersucht, ob es nicht ähnliche qualitative Argumente gibt, die die Anti-deSittergruppe als Symmetriegruppe ausschließen. Für eine systematische Untersuchung dieser Frage steht noch die vollständige Zerlegung des Tensor-Produkts zweier irreduzibler Darstellungen und der regulären Darstellungen aus.

Unsere Methode, aus einem nicht-relativistischen Wechselwirkungsmodell ein relativistisches zu konstruieren, liefert dem herkömmlichen Ansatz widersprechende Ergebnisse; z. B. ist das Spektrum der inneren Energie unabhängig von der Licht-Geschwindigkeit, im Widerspruch zur "relativistischen Feinstruktur" des Wasserstoff-Atoms. Der Grund ist, daß bei unserer Methode die kinetische und die potentielle Energie von der Lichtgeschwindigkeit abhängen, bei der herkömmlichen dagegen nur die kinetische Energie. Da letztere Methode noch nicht konsistent formuliert wurde, ist dabei nicht klar, was dabei eigentlich relativistisch ist; denn die Form $E = \underline{p}^2/2m + V$ für die innere Energie verrät uns nicht, ob es sich um eine relativistische oder eine nicht-relativistische Theorie handelt, da es eine unitäre Transformation zu der Form $E = \underline{\alpha} \cdot \underline{p} + \beta m + V'$ gibt; allerdings können dabei die Wechselwirkungsterme V und V' i. a. nicht beide ein Potential sein. Damit stellt sich aber die Frage, ob sich bereits für Zwei-Teilchen Systeme Kriterien für relativistische Wechselwirkungsterme wie Kausalität, Lokalität etc. als Forderungen für eine "zulässige" Wahl des Relativimpulses und der Potentiale formulieren lassen.

Danksagung. An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H.-J. MEISTER für das Thema und eingehende Diskussion der Arbeit danken. Herrn Dr. U. MUTZE bin ich für Mitteilungen und Diskussionen über relativistische Theorien mit direkter Wechselwirkung verpflichtet, Herrn Dipl. Phys. W. LUTZENBERGER für den Entwurf eines Programms zu numerischen Berechnung einer Funktion auf dem elektronischen Tischrechner HP 9100 A. Diese Arbeit wurde mir ermöglicht durch einen Arbeitsplatz

und durch die Benutzung weiterer Einrichtungen des Lehrstuhls Prof. Dr. F. Bopp; die hier vorgelegten Ergebnisse wurden im Verlauf eines mit DFG-Mitteln finanzierten Forschungsprogramms erarbeitet.

Literatur.

1. M. GERSTENHABER: "On the Deformation of Rings and Algebras",
Ann. of Math. 79, 59-103 (1964)
2. M. LEVY-NAHAS: "Deformation and Contraction of Lie Algebras",
J. Math. Phys. 8, 1211-1222 (1967)
3. A. NIJENHUIS, R.W. RICHARDSON, Jr.: "Cohomology and Deformations in
Graded Lie Algebras", Bull. Amer. Math. Soc. 72, 1-29 (1966)
4. I.E. SEGAL: "A class of operator algebras which are determined by
groups", Duke Math. J. 18, 221-265 (1951)
5. E. INÖNÜ, E.P. WIGNER: "On the Contraction of Groups and their
Representations", Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39, 510-524 (1953)
6. E.J. SALETAN: "Contraction of Lie Groups",
J. Math. Phys. 2, 1-21 (1961)
7. H.D. DOEBNER, O. MELSHEIMER: "On a Class of Generalized Group
Contractions", N.C. 49A, 306-311 (1967)
8. J.-M. LÉVY-LEBLOND: "Une nouvelle limite non-relativiste du groupe
de Poincaré", Ann. Inst. H. Poincaré A3, 1-12 (1965)
9. N.D. SEN GUPTA: "On an analogue of the Galilei group",
N.C. A44, 512-517 (1966)
10. V. BARGMANN: "On unitary ray representations of continuous
groups", Ann. of Math. 59, 1-46 (1954)
11. S. HELGASON: "Differential Geometry and Symmetric Spaces",
Academic Press, New York and London 1962
12. J. MICKELSSON, J. NIEDERLE: "Contraction of representations of
de Sitter groups", Com. Math. Phys. 27, 167-180 (1972)
13. H.-J. MEISTER: "Einführung in die Theorie der topologischen und
Lie-Gruppen", Sektion Physik der Universität München 1972
14. V. BERZI, V. GORINI: "Lie-group and Lie-algebra inhomogeniza-
tions", J. Math. Phys. 9, 816-828 (1968)

15. L.S. PONTRJAGIN: "Topologische Gruppen, Teil 2",
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1958
16. W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE: "Connections, Curvature, and
Cohomologie I", Academic Press, New York and London 1972
17. V. BARGMANN: "Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations",
J. Math. Phys. 5, 862-868 (1964)
18. E. NELSON: "Analytic Vectors", Ann. of Math. 70, 572-615 (1959)
19. K. YOSIDA: "Functional Analysis", Springer-Verlag, Berlin,
Göttingen, Heidelberg 1965
20. J. DIXMIER: "Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien
(Algèbres de von Neumann)", Gauthier-Villars, Paris 1969
21. E. P. WIGNER: "On unitary representations of the inhomogeneous
Lorentz group", Ann. of Math. 40, 149-204 (1939)
22. I.M. GEL'FAND, R.A. MINLOS, Z. Ya. SHAPIRO: "Representations of the
rotation and Lorentz groups and their application",
Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963
23. H. BACRY, J.-M. LÉVY-LEBLOND: "Possible Kinematics",
J. Math. Phys. 9, 1605-1614 (1968)
24. C. KITTEL, W.D. KNIGHT, M.A. RUDERMANN: "Mechanics, Berkeley
physics course - volume 1", McGraw-Hill Book Company,
New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London,
Sidney 1965
25. L.L. FOLDY: "Relativistic particle systems with interaction",
Phys. Rev. 122, 275-288 (1961)
26. U. MUTZE: "A Relativistic Scattering System",
Sektion Physik der Universität München 1973
27. E. INÖNÜ, E.P. WIGNER: "Representations of the Galilei group",
N.C. 9, 705-718 (1952)
28. J.-M. LÉVY-LEBLOND: "Galilei Group and Nonrelativistic Quantum
Mechanics", J. Math. Phys. 4, 776-788 (1963)
29. R.H. BRENNICH: "The irreducible ray representations of the full
inhomogeneous Galilei group", Ann. Inst. H. Poincaré 13A,
137-161 (1970)
30. J.-M. LÉVY-LEBLOND: "Galilei group and Galilean invariance", in
Loebl: "Group Theory and Its Applications II",

Academic Press, New York and London 1971

31. A.S. WIGHTMAN: "L'invariance dans la mecanique quantique relativiste", in C. deWitt, R. Omnes: "Relations de dispersion et particules élémentaires", Les Houches 1960, Hermann, Paris 1960
32. L. BERGMANN, C. SCHAEFER: "Lehrbuch der Experimentalphysik, I. Band: Mechanik, Akustik, Wärmelehre", Walter deGruyter & Co, Berlin 1943
33. V. BARGMANN: "Irreducible unitary representations of the Lorentz group", Ann. of Math. 48, 568-640 (1947)
34. S. BOCHNER, K. CHANDRASEKHARAN: "Fourier transforms", Ann. of Math. Studies 19 (1953)
35. J.L. SYNGE: "Relativity: the general theory", North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1960
36. S.W. HAWKING, G.F.R. ELLIS: "The large scale structure of space-time", University Press, Cambridge 1973
37. H. BRENNICH: "Die Induktion von Gruppendarstellungen und ihre Anwendung auf die inhomogene Galilei-Gruppe", Sektion Physik der Universität München 1968
38. R. HAAG: "Lecture Notes on Quantum Field Theory", Urbana/Ill. 1962
39. R. HERMANN: "Analytic Continuation of Group Representations I- VI", siehe Com. Math. Phys. 6, 205-225 (1967)
40. E. WEYMAR: "What does the centre of the universal enveloping algebra tell us about the deformations of representations?", N.C. 15B, 245-256 (1973)

"A general first-order deformation solution", N.C. 15B, 257-271 (1973)

"Deformations into main and supplementary series", N.C. 15B, 272-283 (1973)
41. J.B. EHRMAN: "On the unitary irreducible representations of the universal covering group of the 3+2 deSitter group", Proc. Phil. Soc. 53, 290-303 (1957)
42. N.T. EVANS: "Discrete Series for the Universal Covering Group of the 3+2 deSitter Group", J. Math. Phys. 8, 170-184 (1967)

43. C. BALTAY, G. FEMINBERG, N. YEH: "Search for Uncharged Faster-Than-Light Particles", Phys. Rev. D 1, 759-770 (1970)
44. M. FLATO, D. STERNHEIMER: "Poincaré partially integrable local representations and mass-spectrum", Com. Math. Phys. 12, 296-303 (1969)
45. W. TAIT, J.F. CORNWELL: "Coupling of deSitter Space-Time and Internal Symmetry", J. Math. Phys. 12, 1651-1654 (1971)
46. J. DIEUDONNÉ: "Treatise on Analysis III", Academic Press New York and London 1972
47. T.O. PHILIPS, E.P. WIGNER: "DeSitter Space and Positive Energy", in Loebbl: "Group Theory and Its Applications", Academic Press, New York and London 1968

Dabei bedeutet

Ann. of Math. = Annals of Mathematics

J. Math. Phys. = Journal of Mathematical Physics

Bull. Amer. Math. Soc. = Bulletin of the American Mathematical Society

Duke Math. J. = Duke Mathematical Journal

Proc. Nat. Acad. Sci. USA = Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)

N.C. = Il Nuovo Cimento

Ann. Inst. H. Poincaré = Annales de l'Institut Henri Poincaré

Com. Math. Phys. = Communications in Mathematical Physics

Phys. Rev. = Physical Review

Proc. Phil. Soc. = Proceedings of the Cambridge Philosophical Society

Bezeichnungen.

Die Kapitel sind in der vorliegenden Arbeit fortlaufend nummeriert, die Paragraphen sind innerhalb der einzelnen Kapitel fortlaufend nummeriert, und die Formeln sind innerhalb der einzelnen Paragraphen mit der Nummer des Paragraphen und - durch einen Punkt getrennt - einer fortlaufenden Zahl gekennzeichnet. Wird auf eine Formel im selben Kapitel verwiesen, so werden nur diese beiden Zahlen angegeben, ansonsten wird die Nummer des Kapitels - wieder durch einen Punkt getrennt - vorangestellt. x\$y bedeutet Kapitel x, Paragraph y. Zur leichteren Auffindung der Formeln ist am oberen äußeren Rand je-der Seite Kapitel und Paragraph angegeben.

Ein Balken $\overline{\quad}$ über einer Menge deutet eine topologische Überlagerung oder einen topologischen Abschluß an; die Tilde $\sim$ bedeutet die universelle Überlagerung bei Mengen, die Fourier-Transformierte bei Funktionen. Ein Balken $\underline{\quad}$ unter einem Symbol deutet an, daß es sich um eine drei-komponentige Größe handelt und ein Hütchen $\hat{\quad}$ Fortsetzung einer Funktion von einem Intervall auf ganz $\mathbb{R}$.

Analytisch soll in dieser Arbeit reell-analytisch heißen,
Vektorraum soll endlich-dimensionaler Vektorraum heißen,
Mannigfaltigkeit soll reell-analytische Mannigfaltigkeit heißen,

Hilbertraum soll separabler komplexer Hilbertraum heißen, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Im Folgenden sind die häufiger verwendeten mathematischen Symbole angeführt:

∞ unendlich	$\times$ Produkt, direktes Produkt, Vektor-Produkt
$\subseteq$ Inklusion von Mengen	
$\in$ Element aus	$\otimes$ direktes Produkt, Tensor-Produkt
$\Rightarrow$ daraus folgt	
$\Leftrightarrow$ gilt genau dann	$\otimes, \oslash$ semi-direktes Produkt (rechts bzw. links Normalteiler)
$\oplus$ direkte Summe von Vektorräumen, Hilberträumen, Operatoren,...	$\times$ diadisches Produkt
$\oplus$ direkte Summe von Algebren	$[\cdot, \cdot]$ Kommutator
$\oplus, \oslash$ semi-direkte Summe von Algebren (rechts bzw. links das Ideal)	$\sum_{i=n}^m$ Summe in Schritten von +1 von n bis m
$\oplus \int$ direktes Integral	$\sum_{i \in I}$ Summe über I
$\cup$ Vereinigung von Mengen	$M \setminus N$ Komplement von N in M
$\forall$ es gibt	G/H Quotientenraum der Gruppe G nach der Untergruppe H
$\cap$ Durchschnitt von Mengen	$\frac{\partial}{\partial x}$ partielle Ableitung nach x
$\bigwedge$ für alle	$+$ Adjunktion von Operatoren
$\blacksquare$ Ende eines Beweises	$*$ komplexe Konjugation
$\cdot$ Skalarprodukt von drei-komponentigen Größen	$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0)
$\circ$ Komposition von Abbildungen	$\cong$ äquivalent
$\sim$ diffeomorph	

$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$[x, y]$	Kommutator von x mit y , abgeschlossenes Intervall von x bis y
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$[x, y[$, $]x, y]$	halboffenes In=tervall von x bis y
$\mathbb{R}_+$	Menge der reellen Zahlen, die größer 0 sind	$]x, y[$	offenes Intervall von x bis y
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	id_M	Identität auf M
$\mathbb{C}_1$	Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1	$\exp$	Exponentialabbildung
$\mathbb{R}^n$	Vektorraum der n -Tupel von reellen Zahlen	$\text{Aut}(A)$	Automorphismengruppe von A
$\mathbb{C}^n$	Vektorraum der n -Tupel von komplexen Zahlen	$C(x)$	zentrales Element einer universellen einhüllenden als Polynom der Elemente x
$\{x \phi(x)\}$	die Menge der x , für die $\phi(x)$ gilt	d^k, D^K	von der Kontraktion k bzw. K erzeugte Deforma=tion
$\{x \in M \phi(x)\}$	die Menge der x aus M , für die $\phi(x)$ gilt	$\mathcal{D}$	von der Deformation D einer Lie-Gruppe erzeugte Deformation ihrer Algebra
$(x_i)_{i \in I}$	die Familie über I mit den Elementen x_i	M_p	Zusammenhangskomponente, die p enthält
$d \downarrow I$	Beschränkung von d auf I	T, T_0	Tangentialraum im Eins=element
$d \uparrow I$	Fortführung von d auf I	T_p	Tangentialraum im Punkt p
$f(s, .), f(. , s)$	Abbildung, die aus f durch festhalten des ersten bzw. zweiten Arguments entsteht	k_s, K_s	Kontraktor an der Stel=le s
$\text{Diff}(M)$	Gruppe der Diffeomorphis=men einer Mannigfaltigkeit	$\cdot T_s$	Automorphismenschar an der Stelle s
$x \mapsto y$	x wird y zugeordnet	J_s	Schar von Diffeomorphis=men oder unitären Opera=toren an der Stelle s
$t \rightsquigarrow x$	t geht gegen x	S_n	n -Sphäre ($n = 1, 2, \dots$)
$\lim_{t \rightarrow x}$	Grenzwert für t gegen x		
$x_n \xrightarrow{n \rightarrow y} x$	x_n geht für n gegen y gegen x		
$[x], [x; p.y]$	Literaturstelle x , Literaturstelle x , Seite y		
$[R]$	Äquivalenzklasse, die R ent= hält		

P_n n-dimensionaler (reeller) projektiver Raum	
$\text{sign}(x)$ Vorzeichen von x (ist 0 für $x = 0$)	$\square_{R,c}$ 5.2.23
$S(\mathbb{R})$ Raum der Schwartz'schen Funktionen auf $\mathbb{R}$	$S_{R,c}^k$ 5.2.13 $B_{R,c}^k$ 5.2.14
$P(H)$ Menge der eindimensionalen Projektoren auf H oder H selbst	$M(s)$ 6.4.7 $\underline{k}(s)$ 6.4.8
$\mathbb{P}(H)$ $\mathbb{W}(H) \cup A \mathbb{W}(H) / \mathbb{E}_1$ oder $\mathbb{W}(H) \cup A \mathbb{W}(H)$	$\underline{p}(s)$ 6.4.10
$\mathbb{W}(H)$ Gruppe der unitären Operatoren auf H	$Q(\underline{p}, \underline{v})$ 4.4.2 viii $U(\underline{x}, \underline{y})$ 4.4.1 iv
$A \mathbb{W}(H)$ Menge der anti-unitären Operatoren auf H	v_m 2.1.3 m_v 2.1.2
$L_2^\mu(M, \mathbb{C}^n)$ Hilbertraum der μ -betragsquadrat-integrierbaren, meßbaren Funktion von M in $\mathbb{C}^n$ mit $f = g$, wenn $f(x) = g(x)$ μ -fast überall, und $\langle f, g \rangle := \int_M \mu(dx) f(x)^* g(x)$	$o(p, q)$ 1.4.1 ii $io(p, q)$ 1.4.2 ii $io(p, q)_G$ 1.4.2i $io(p, q)_C$ 1.4.3i $zio(p, q)$ 1.4.4 ii $zio(p, q)_G$ 1.4.4i
$\dim(V)$ Dimension von V	$O(p, q)$ 2§4
$\dim(H)$ Hilbert-Dimension von H	$O(p, q)_O$ 2§4 $O(n, 1)_O$ 2.4.1 ii $IO(n)_O$ 2.4.1i $IO(n, 1)_O$ 2.4.3 ii $IIO(n)_G$ 2.4.3i $IIO(n)_C$ 2.4.4i $ZIO(n, 1)_O$ 2.4.5 ii $ZIIO(n)_G$ 2.4.5i
$U(K, J, T)$ von dem Kontraktor (K, J, T) erzeugte Kontraktion der Darstellung	$\overline{O(n, 2)}_O$ 2.4.2 $\overline{O(2, 3)}_O$ 5.2.8
$L_C(\underline{v}, D)$ 5.2.4	$[m e, j]$ 6.1.5 $[m e, j]_S$ 6.1.6
$S_{R,c}$ 5.2.5, 5.2.6, 5.2.9	
$\bar{S}_{R,c}$ 5.2.27	
$M_{R,c}$ 5.2.10	

$[O p,j]$	6.2.1	m	Multiplikation, freie Masse
$[O p,O]_O$	6.2.14	M	Mannigfaltigkeit, Matrix, Masse
$[O p,O]_S$	6.2.14	p	Viererimpuls, Wellenzahl
$[O p,j]_O$	6.2.18, 6.3.5	P	Projektor
$[O p,j]_O'$	6.3.7	$\underline{p}$	Impuls, innerer Impuls
$[O p,j]_S$	6.2.18, 6.3.5	$\underline{P}$	Impuls, Schwerpunkts=impuls
$[O p,j]_S'$	6.3.7	R	Darstellung, Krümmungsradius der Anti-deSitter-Welt
c	Lichtgeschwindigkeit	s	Deformationsparameter
d	Deformation einer Lie-Algebra	$\underline{S}$	Spin
D	Deformation einer Lie-Gruppe	t	Umparametrisierung
e	innere Energie, $\exp(1)$	T	Automorphismenschar
E	Energie	U	Darstellung, Deformation einer Darstellung
f	feste Deformation	v	Verknüpfung
fk	fester Kontraktor	V	Vektorraum, Wechselwirkungsterm, Potential
G	Lie-Gruppe	w	Wirkung, Faktor
H	Hilbertraum, Untergruppe	W	Deformation einer Wirkung
I	offenes Intervall, Indexmenge	κ	Krümmungs-Skalar
J	Isomorphismenschar	λ	Eigenwert
k	Kontraktor einer Lie-Algebra, Viererimpuls	μ	reduzierte Masse, Maß
K	Kontraktor einer Lie-Gruppe	ω	Multiplikator, Faktor
$\underline{k}$	Impuls	$\mathcal{K}$	Ricci-Krümmung
$\underline{K}$	Erzeugende der Lorentz- oder der Galilei-Transformationen	$\underline{O}$	Pauli-Matrizen
		τ	Exponent, Eigenzeit

Lebenslauf.

Am 10.6.1944 wurde ich als drittes Kind des Geologen Dr. Gerhard Brennich und seiner Frau Ilse, geb. Hauter, in Krakau, Polen, geboren. 1950 wurde ich in der Volksschule Biburg bei Fürstenfeldbruck eingeschult, wechselte 1953 nach Ankara und besuchte dort ab 1955 die deutsche Botschaftsschule, die ich 1960 mit dem Zeugnis der mittleren Reife verlies. Von 1960 bis 1962 besuchte ich das staatl. Landschulheim Marquartstein; an der dortigen Oberrealschule legte ich 1962 die Reifeprüfung ab.

Im Wintersemester 1962/63 begann ich an der Universität München das Studium der Physik und bestand im Sommersemester 1965 die Vordiplomprüfung. Im Wintersemester 1966/67 begann ich unter der Leitung von Herrn Dr. H.-J. Meister meine Diplomarbeit mit dem Thema: "Die Induktion von Gruppendarstellungen und ihre Anwendung auf die inhomogene Galilei-Gruppe". Im Sommersemester 1968 bestand ich die Diplomprüfung.

Seit 1968 bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter von Prof. Dr. H.-J. Meister und werde seit 1969 mit DFG-Mitteln unterstützt. Ich veröffentlichte

1969: "Zur Begründung der Lorentz-Gruppe von Süßmann", Zeitschrift für Naturforschung 24a, 1853-1854 (1969);

1970: "The irreducible ray representations of the full inhomogeneous Galilei group", Annales de l'Institut Henri Poincaré A13, 137-161 (1970).

